Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2000

Übungen zu Analysis II

Aufgaben zur Integration

53. Für eine Teilmenge A von [0,1] bezeichne χ_A die Funktion

$$[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & \text{falls} \quad x \in [0,1] \backslash A \end{cases}.$$

(1) Sei $p \in [0,1]$. Zeige, daß die Funktion $\chi_{\{p\}}$ Riemann-integrierbar ist. Leite daraus ab, daß für jede endliche Teilmenge E von [0,1] die Funktion χ_E Riemann-integrierbar ist.

(2) Zeige, daß die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

54. Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$$

definierte Folge reeller Zahlen. Leite mittels partieller Integration eine Rekursionsformel vom Typ $I_n = c_n I_{n-2}$ her und berechne I_5.

55. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeige, daß gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon f(x)}{\varepsilon^2 + x^2}\, dx \quad = \quad f(0).$$

Hinweis: Verifiziere die Aussage für die Spezialfälle

1. f ist konstant (geeignete Substitution),
2. $f(0) = 0$ (Aufspaltung von $\int_{-1}^{1}$ in $\int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1}$).

56. Berechne für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$. Dabei sei $f(x) :=$

a) $\dfrac{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x + 3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+1)}$, b) $\dfrac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$, c) $\dfrac{3x^3 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}$,

d) $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x - 2}$, e) $\dfrac{6x+1}{(x^2 - 6x + 18)^2}$, f) $\dfrac{5x^2 - 7x + 6}{x^3 - 3x^2 + 4}$,

g) $\dfrac{4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 10x - 6}{x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 10x^2}$, h) $\dfrac{x^5+1}{x^2+x^3}$, i) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{(2x+5)(x^2-1)}$,

j) $\dfrac{6x^2 + x + 3}{3x + 5}$, k) $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$.

Hinweis zu k): $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$.

57. Zeige, daß gilt:

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{2x^2 - 2x + 10}{x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{36}.$$

58. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, und $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Berechne für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.
Dabei sei $f(x) :=$

a) $\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$, b) $x\sqrt[k]{ax+b}$, c) $\dfrac{x}{\sqrt[k]{ax+b}}$, d) $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x}$,
e) $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{2x+1}}$, f) $\dfrac{1}{x+1}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, g) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, h) $\dfrac{1}{x\sqrt{4-x}}$.

59. Berechne für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(\varphi)\,d\varphi$.
Dabei sei $f(\varphi) =$

a) $\dfrac{2}{5-3\cos\varphi}$, $(\alpha, \beta \in (-\pi, \pi))$ b) $\dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi - 1}$, c) $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi + 1}$
d) $\dfrac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi}$, e) $\dfrac{2+\tan^2\varphi}{\sin 2\varphi}$.

60. Die Funktion $f:\ (0, \pi) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \frac{(1+\cos x)(2\cot\frac{x}{2} - 2)}{(3 - 2\sin x + \cos x)\sin x}.$$

Bestimme diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

61. Berechne für alle zulässigen Integrationsgrenzen $-\pi < \alpha < \beta < \pi$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ mit

$$f(x) = \frac{(cot\frac{x}{2})^2}{(1+\cos x)(\cos x + \sqrt{3}\sin x)}.$$

62. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x\ln x - x} \int_0^x \ln(1+\sin t)\,dt$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \tan^2 x \Big(\int_0^{x^2} \sqrt{1-t^2}dt \Big)^{-1}$,
c) $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| \int_0^x \dfrac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^7} \int_1^x e^{-\sqrt{t}}\,dt$,
e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}\Big(\int_2^x e^{t^2}\,dt - x + 2 \Big)$,
f) $\lim\limits_{x\to e+} (\arctan(x-e))^{-1} \int_e^x u^2 \ln^2 u\,du$,
g) $\lim\limits_{x\to 1+} \int_1^{x^2} \ln(\sin(\sqrt{t}\frac{\pi}{2}))dt \Big(\int_0^{\sqrt{x^2-1}} t\ln(t+1)dt \Big)^{-1}$.

Lösungen: a) 0, b) 1, c) 0, d) $+\infty$, e) $e^4 - 1$, f) e^2.

63. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz. Bestimme gegebenenfalls die Parameterwerte, für die das Integral existiert.

a) $\int\limits_e^\infty \dfrac{dt}{t\ln^\alpha t}$ b) $\int\limits_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$ c) $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\ln x\,dx$
d) $\int\limits_0^1 \dfrac{1-\cos x}{x^3}\,dx$ e) $\int\limits_1^\infty \dfrac{e^{-x} + 3\cos x}{(1+x)(x+2)}\,dx$

f) $B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ $\quad$ ($B(\alpha,\beta)$ heißt Betafunktion)

g) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x + x\ln^2 x}$ $\quad$ h) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

i) $\int\limits_1^\infty \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx,\ \int\limits_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad$ j) $\int\limits_1^\infty \frac{(\ln x)(\cos x)}{x^4\tanh x\sin(1/x)}\,dx$

k) $\int\limits_0^\infty \frac{(\sin x)\ln(1+x)}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ $\quad$ l) $\int\limits_2^\infty \frac{x\sin x}{(1+\sqrt{x})(1-x^2)}\,dx$

m) $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{t}\arctan t}{(1-\sqrt{t})(1+t^2)}\,dt$ $\quad$ n) $\int\limits_2^\infty \frac{\sqrt{x}(\ln x)\arctan x}{(1+x)(\sqrt{x}-1)}\,dx$

o) $\int\limits_0^1 \frac{e^x - x - 1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ $\quad$ p) $\int\limits_2^\infty \frac{(\ln x)^3 x^{(\pi/2-\arctan x)}}{x^3}\,dx$

q) $\int\limits_e^\infty \frac{\cosh x\ln(x-2)}{xe^x(\ln x)^2}\,dx$ $\quad$ r) $\int\limits_e^\infty \frac{\sqrt{3+x^5}\ln x}{x^{\beta+3}}\,dx$

64. Sei $a > 0$ und $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige:
Ist $\left|\int\limits_a^x f(t)dt\right| \leq M$ für alle $x \in [a,\infty)$ $(M > 0)$, so existiert für alle $\alpha > 0$ das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$.
Hinweis: Partielle Integration.

65. Zeige mit Hilfe von Aufgabe 64, daß die folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

a) $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}}\,dx$ $\quad$ b) $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)dx (= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, Fresnelsches Integral)

c) $\int\limits_a^\infty \frac{\sin 2x}{x^\alpha}\,e^{\sin x}\,dx,\ a,\alpha > 0$

Hinweis: Substituiere in b) $x^2 = t$.

66. Untersuche mit Hilfe des Integralkriteriums folgende Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln^\alpha k}$ $(\alpha \geq 0)$ $\quad$ b) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{k^{\alpha-1}}{(1+k)^{\alpha+\beta}}$ $(\beta > -1)$

c) $\sum\limits_{k=3}^\infty \frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^\alpha}$ $(\alpha \geq 0)$ $\quad$ d) $\sum\limits_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{(1+\pi/2-\arctan k)}}$

Lösungen: a) konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $0 \leq \alpha \leq 1$,
b) konvergent für $\beta > 0$, divergent für $-1 < \beta \leq 0$,
c) konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $0 \leq \alpha \leq 1$, $\quad$ d) divergent.

67. a) Zeige die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrals:

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x > 0.$$

b) Die Gammafunktion Γ wird definiert über das uneigentliche Integral aus Teil a), d.h. $\Gamma(x) := \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ für $x > 0$.
Zeige: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

68. Bestimme die Menge aller $\alpha > 0$, für die das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^\infty \frac{(\sin x)^\alpha (\ln(1+x^3))^2}{x^8} dx.$$

Aufgaben zu Metrischen Räume

69. Wir stellen uns die Menge F aller französischen Bahnstationen als Teilmenge von $\mathbb{C}$ vor, die den Punkt 0 (Paris) enthält. Entsprechend dem radialen Aufbau des Streckennetzes verlangt die französische Eisenbahn für eine Reise von Station z nach Station w den Fahrpreis $p(z,w) := |z-w|$, falls die Stationen auf einer Geraden durch Paris liegen (d.h. falls $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so existieren, daß $\lambda z + \mu w = 0$ ist), und den Fahrpreis $p(z,w) := |z| + |w|$, falls die Stationen auf verschiedenen Geraden durch Paris liegen. Zeige, daß die so definierte Fahrpreisfunktion p eine Metrik auf F ist.

70. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Definiere $d' := \frac{d}{1+d}$.

    (1) Zeige, daß auch d' eine Metrik auf X ist.

    (2) Sei M die Menge aller Folgen in X. Zeige, daß für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ die Reihe

    $$\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d'(x_n, y_n)$$

    konvergiert, und daß durch

    $$((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d'(x_n, y_n)$$

    eine Metrik d_M auf M definiert wird.

71. Bezeichne d die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Definiere $A := \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\}$ und $B := \{(x,x) | x = 0 \text{ oder } x \in (1,\infty)\}$. Überprüfe für jede der Mengen $\{(0,0)\}$ und $\{(x,x) | x \in (1,\infty)\}$ die Offenheit und Abgeschlossenheit in jedem der metrischen Räume $(A, d_{A\times A})$ und $(B, d_{B\times B})$ und $(\mathbb{R}^2, d)$.

72. Zeige, daß durch

    $$(x,y) \mapsto |\arctan x - \arctan y|$$

    eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ definiert wird, für die gilt:

    (i) Die bezüglich der Metrik d offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die bezüglich der euklidischen Metrik offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

    (ii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

73. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Sei $A \subset X$, und seien $f, g : X \to Y$ stetige Funktionen so, daß $f_{|A} = g_{|A}$ ist. Zeige, daß dann auch $f_{|\overline{A}} = g_{|\overline{A}}$ ist.

74. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Seien $A, B \subset X$ so, daß die Abbildungen $f_{|A}$ und $f_{|B}$ stetig sind.

(i) Zeige anhand eines Beispiels, daß die Abbildung $f_{|A\cup B}$ nicht stetig zu sein braucht.

(ii) Zeige, daß die Abbildung $f_{|A\cup B}$ zumindest dann stetig ist, wenn beide Mengen A und B offen oder beide Mengen A und B abgeschlossen sind.

75. Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

    (1) Sei $y \in H$. Zeige, daß die Abbildung

    $$H \to K, x \mapsto \langle x, y\rangle$$

    in $L(H, K)$ liegt, und berechne ihre Operatornorm.

    (2) Zeige, daß $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (als Abbildung von $H \times H$ nach K) stetig ist.

76. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, daß K genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

77. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Sei $f : X \to Y$ eine stetige und injektive Funktion.

    (1) Zeige anhand eines Beispiels, daß die Funktion f^{-1} im allgemeinen nicht stetig zu sein braucht.

    (2) Zeige, daß f^{-1} zumindest dann stetig ist, wenn X kompakt ist.

78. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, und seien $K \subset X$ und $L \subset Y$. Zeige, daß gilt:

    $$K \times L \quad \text{ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad K \quad \text{ist kompakt und} \quad L \quad \text{ist kompakt.}$$

79. Überprüfe, ob die Menge

    $$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x^3 \leq y < x\}$$

    a) offen in $\mathbb{R}^2$, b) abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, c) zusammenhängend ist.

Aufgaben zur Differenzierbarkeit

80. Definiere

    $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \exp(x)\sin(y).$$

    Bestimme das Taylorpolynom T_2 von f um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und zeige durch Abschätzung des Restgliedes, daß für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(x, y)||_1 \leq 1$ gilt:

    $$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{e}{6}||(x, y)||_1^3.$$

81. (1) Bestimme für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $D \subset \mathbb{R}^3$) die Taylorpolynome erster oder zweiter Ordnung $T_p, p = 1, 2$ bezüglich des Entwicklungspunktes x_0.

(2) Schätze den absoluten Betrag des Restgliedes $R_p = f - T_p$ mit Hilfe der Taylorformel nach oben ab, also $|R_p|_U| \leq \epsilon$, wobei U ein Quadrat (bzw. ein Würfel) ist,d.h.:

$U = \{(x, y) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\}$ bzw.
$U = \{(x, y, z) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r, |z - z_0| \leq r\}$.

a) $f(x, y) = y \arctan x^2,\ x_0 = (1, 2),\ r = \frac{1}{10},\ p = 1$
b) $f(x, y) = \frac{4}{\pi}(x^2 + y^2) + \sin^2(x + y),\ x_0 = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}),\ r = \frac{1}{10},\ p = 2$
c) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)},\ x_0 = (1, 0),\ 0 < r \leq \frac{1}{2}$ fest, $p = 2$
d) $f(x, y, z) = e^x \cos(y - 1) + 3z^2,\ x_0 = (1, 1, -1),\ r = \frac{1}{10},\ p = 1$

Lösungen:
a) $T_1(x, y) = \pi/2 + 2(x - 1) + \pi/4(y - 2)$
$|R_1(x, y)| \leq 6 \cdot 10^{-2}$
b) $T_2(x, y) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + 2(x - \frac{\pi}{8}) + 2(y - \frac{\pi}{8}) + \frac{4}{\pi}(x - \frac{\pi}{8})^2 + \frac{4}{\pi}(y - \frac{\pi}{8})^2$
$|R_2(x, y)| \leq \frac{32}{3}\ 10^{-3}$
c) $T_2(x, y) = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x - 1) - \frac{1}{e}y^2 + \frac{1}{e}(x - 1)^2$
$|R_2(x, y)| \leq \frac{56}{3}\ r^3 e^{-1/4}$ (grobe Abschätzung)
(Durch eine etwas feinere Abschätzung erhält man sogar $|R_2(x, y)| \leq \frac{21}{2}\ r^3 e^{-1/4}$)
d) $T_1(x, y, z) = e + 3 + e(x - 1) - 6(z + 1)$
$|R_1(x, y, z)| \leq \frac{1}{100}(3 + 2e^{11/10}) < \frac{1}{10}$

82. (1) Bestimme für $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ das Taylorpolynom 2. Ordnung T_2 mit Entwicklungspunkt 0 und zeige für $|x| \leq r$, wobei $0 < r \leq 1/\sqrt{2}$ fest, aber beliebig vorgegeben sei, $|R_2(x)| \leq \frac{r^3}{6}$.

(2) Bestimme für $f(x, y) = \sinh x \cosh y$ das Taylorpolynom 2. Ordnung T_2 mit Entwicklungspunkt 0 und zeige für $|x| \leq r, |y| \leq r$, wobei $r > 0$ fest, aber beliebig vorgegeben sei, $|R_2(x, y)| \leq \frac{2}{3} r^3 e^{2r}$.

Lösung: a) $T_2(x) = x$

83. Bestimme für die folgenden Funktionen f die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0 und zeige, daß diese in dem angegebenen Bereich gegen f konvergiert.

a) $f(x) = \ln(1 + x),\ x_0 = 0,\ 0 \leq x \leq 1$
b) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},\ x_0 = 0,\ 0 \leq x < 1$
c) $f(x) = (1 + x)^\alpha,\ x_0 = 0,\ 0 \leq x < 1,\ \alpha \neq 0$

Lösungen: a) $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\ x^n$
b) $T(x) = 1 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$
c) $T(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!}\ x^n$

84. Bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$$

um den Entwicklungspunkt 0. Zeige, daß f auf dem Intervall $[0, 1)$ durch diese Taylorreihe dargestellt wird.

Zusatz: Zeige, daß f sogar auf dem Intervall $(-1, 1)$ durch diese Taylorreihe dargestellt wird.

85. Bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, 1)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{1+xy}}{1-y}$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$, und zeige, daß f auf dem gesamten Definitionsbereich durch diese Reihe dargestellt wird.

86. Definiere

$$f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y.$$

Bestimme das Taylorpolynom T_2 von f um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$ und berechne damit einen Näherungswert für $1.05^{1.02}$. Vergleiche diesen mit dem tatsächlichen Wert.

87. Bestimme den maximalen Funktionswert M und den minimalen Funktionswert m von f auf den angegebenen Mengen B.

a) $f(x,y) = e^{x^2+y}(y^2+y+1)$, $\quad B = \{(x,y) | y + x^2 \leq 0,\ y \geq -\frac{3}{2}\}$
b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$, $\quad B = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$
c) $f(x,y) = (x - y^2)e^{-x^2}$, $\quad B = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1,\ y^2 \leq x\}$
d) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2(1 + \ln(1 + x^2))$, $\quad B = \{(x,y) |\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$
e) $f(x,y) = e^5 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2 - 35)e^{-x}$, $\quad B = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 36\}$

88. Es sei $G = \{(x,y,z) | x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Bestimme mit Hilfe der Lagrangeschen Methode das mögliche Minimum der Funktion $f(x,y,z) = (4+x)(1+y)(2+z)$ auf G unter der Nebenbedingung $xyz = a^3 \quad (a > 0 \quad \text{fest})$.

Lösung: Das mögliche Minimum ist $(2+a)^3$ in $x_0 = (2a, a/2, a)$.

89. Sei $K := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \leq 1\}$. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_2 x_3.$$

Lösung: $max = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $min = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

90. Ermittele die Stellen, wo mögliche Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ (bzw. $g(x,y,z) = 0$) vorliegen.

a) $f(x,y) = (x+4y-1)(1+x^2+4y^2)^{-1/2}$, $\quad g(x,y) = x^2+4y^2-15$
b) $f(x,y) = (2x+y+1)(1+2x^2-4xy+5y^2)^{-1/2}$, $\quad g(x,y) = 2x+y-2$
c) $f(x,y,z) = 12x^2+4y^2-2z^2-8yz$, $\quad g(x,y,z) = 2x^2+y^2+z^2-5$

Lösung: a) $x_0 = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\quad x_1 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ $\quad$ b) $x_0 = (4/5, 2/5)$
c) $x_{1,2} = \pm(0,1,2)$ (lokale Minima); $x \in E := \{(x,y,z) | 2x^2+5z^2 = 5, y = -2z\}$ (lokale Maxima)

91. Sei $\Delta := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \leq 1-x\}$. Definiere

$$f : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x}(y^2 - y + \frac{x}{3}).$$

Bestimme die globalen Extrema der Funktion $f_{|\Delta}$.

92. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y \, \exp\left(\frac{x^2}{2} - xy\right).$$

93. An welchen Stellen x besitzt die Funktion $f : D \to R$ lokale Extrema bzw. Sattelpunkte? Berechne die lokalen Extremwerte.

a) $f(x,y) = xe^y + ye^x \quad D = R^2$ $\quad$ b) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \quad D = R^2$
c) $f(x,y) = x\ln(x+y) - y \quad D = \{(x,y) | x+y > 0\}$
d) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2+1} \quad D = R^2$
e) $f(x,y) = x^4 + \frac{3}{4}y^{8/3} - 4xy - y^2 \quad D = \{(x,y) | y > 0\}$

Lösung: a) Sattelpunkt in $x_0 = (-1,-1)$ $\quad$ b) lokales (sogar globales) Max. in $x_0 = (0,0)$ mit $f(x_0) = 4$ $\quad$ c) Sattelpunkt in $x_0 = (\frac{1}{e}, 0)$
d) lokales (sogar globales) Min. in $x_0 = (0,0)$ mit $f(x_0) = 0$
lokales (sogar globales) Max. in $x_1 = (0,1)$, $x_2 = (0,-1)$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 2$
Sattelpunkte in $x_3 = (1,0)$ und $x_4 = (-1,0)$
e) lokales Min. in $x_0 = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ mit $f(x_0) = -8$.

94. Seien X, Y Banachräume. Sei U eine offene Teilmenge von X, und sei V eine offene Teilmenge von Y. Sei $\xi \in U$. Sei $f : U \to V$ eine Bijektion so, daß f in ξ und f^{-1} in $f(\xi)$ differenzierbar ist. Zeige, daß die Abbildung $Df(\xi)$ ein Isomorphismus ist und gilt:

$$Df^{-1}(f(\xi)) = (Df(\xi))^{-1}.$$

95. Definiere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\exp t, t^2+1, t)$$

und

$$g : (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (z^2 \ln(xy), y \arctan z + x).$$

Zeige, daß f und g differenzierbar sind, und berechne deren Ableitungen. Bestimme daraus mittels der Kettenregel auch die Newton-Ableitung von $g \circ f$.

96. Seien X, Y, Z Banach-Räume. Sei $U \subset X$ offen, und sei $f : U \to Y$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei $A \in L(Y, Z)$. Zeige, daß die Funktion $A \circ f$ zweimal differenzierbar ist, und leite eine Formel für $D^2(A \circ f)$ her.

    Hinweis: Zeige zunächst, daß die Abbildung

    $$L(X, Y) \to L(X, Z), T \mapsto A \circ T$$

    linear und stetig, also differenzierbar ist.

97. Seien X, Y Banach-Räume, und sei $U \subset X$ offen und zusammenhängend. Sei $f : U \to Y$ eine zweimal differenzierbare Funktion so, daß $D^2 f = 0$ ist. Zeige, daß ein $A \in L(X, Y)$ und ein $y \in Y$ so existieren, daß $f = A_{|U} + y$ ist.

98. Seien X, Y, Z Banach-Räume, und sei $b : X \times Y \to Z$ eine stetige bilineare Funktion. Zeige, daß b differenzierbar ist und für alle $(x, y), (\xi, \eta) \in X \times Y$ gilt:

    $$Db(x, y)(\xi, \eta) = b(x, \eta) + b(\xi, y).$$

    Wie sehen die höheren Ableitungen von b aus ?

    Hinweis: Nutze aus, daß b nach Übung genau dann stetig ist, wenn es ein $c > 0$ so gibt, daß für alle $(x, y) \in X \times Y$ gilt:

    $$||b(x, y)|| \leq c||x|| \, ||y||.$$

99. Seien X, Y, Z Banachräume. Seien $U \subset X$ offen und $\xi \in U$. Seien $f : U \to Y$ und $g : U \to Z$ Funktionen. Definiere

    $$(f, g) : U \to Y \times Z, x \mapsto (f(x), g(x)).$$

    Zeige, daß (f, g) genau dann differenzierbar in ξ ist, wenn f und g differenzierbar in ξ sind, und gib eine Formel an, wie man im Fall der Differenzierbarkeit $D(f, g)(\xi)$ aus $Df(\xi)$ und $Dg(\xi)$ erhält.

100. Seien I, J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, daß $\partial_1 f$ existiert und stetig ist. Seien $a, b : I \to J$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeige, daß die Funktion

    $$h : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y)\, dy$$

    differenzierbar ist, und berechne h'.

101. Man differenziere folgende Parameterintegrale mit Hilfe von Aufgabe 100:

a) $F(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan x} \frac{(1+\tan^2 y)e^{x \cdot \tan y}}{\tan y}\, dy$, b) $F(x) = \int\limits_0^x \ln(x^2+y^2)\, dy \quad (x>0)$,

c) $F(x) = \int\limits_2^{\sqrt[5]{x}} \frac{\sqrt{1+xy^5}}{y}\, dy \quad (x>0)$, d) $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{3} \frac{e^{y^2 \sin x}}{y}\, dy \quad (0 < x < \pi)$,

e) $F(x) = \int\limits_{\frac{1}{2x}}^{5} (x - \frac{1}{4y}) e^{4xy}\, dy \quad (x>0)$, f) $F(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2x}} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy \quad (x>0)$.

Lösungen:

a) $F'(x) = \frac{1}{x}(2e^{x^2} - e^x)$; b) $F'(x) = \frac{\pi}{2} + \ln(2x^2)$;

c) $F'(x) = \frac{1}{5x}\Big(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+32x}\Big)$; d) $F'(x) = \frac{\cot x}{2}(e^{9\sin x} - 3e^{\sin^3 x})$;

e) $F'(x) = \frac{e^{20x}}{4x}(20x-1)$; f) $F'(x) = 0$.