Analysis II
Serie 14

1. Seien I, J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, dass $\partial_1 f$ existiert und stetig ist. Seien $a, b : I \to J$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$h : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\, dy$$
differenzierbar ist, und berechnen Sie h'.
Wenden Sie die erhaltene Formel für h' auf $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,
$$h(x) = \int_{\frac{1}{2x}}^{5} \left(x - \frac{1}{4y} \right) e^{4xy} dy$$
an.

2. Sei $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y \text{ rational,} \\ 2x, & \text{falls } y \text{ irrational.} \end{cases}$$
Existieren die Integrale
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dx \right) dy \text{ und } \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\, dy \right) dx?$$

3. Berechnen Sie die Extremwerte der durch $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z$ gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unter den Nebenbedingungen $(x-1)^2 + y^2 = 5$ und $y = z$.

4. Sei $r > 0$ und $f : [-r,r] \times [-r,r] \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, & \text{falls } x^2 + y^2 \le r^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$
Berechnen Sie
$$\int_{-r}^{r} \left(\int_{-r}^{r} f(x,y)\, dy \right) dx.$$
Dieses Integral ist das Volumen einer Halbkugel vom Radius r.