Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 13

1. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = (x - y^2 + 1)^2 + z^2(x-2)^2 + x^2$$

ein lokales Extremum besitzt.

2. Sei $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,u,v) \\ F_2(x,y,u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin(u) - y - v \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass Umgebungen $U \subset \mathbb{R}^2$ von $\binom{0}{-1}$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $\binom{0}{1}$ und eine differenzierbare Funktion

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : U \to V$$

existieren, so dass $F(x, y, f_1(x,y), f_2(x,y)) = 0$ für alle $\binom{x}{y} \in U$ gilt. Berechnen Sie auch $J_f(0,-1)$.

3. Bestimmen Sie die Menge aller Punkte in $\mathbb{R}^2$, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = 8\ln(x^2+1) - 2x^2(y+1) + y^2$$

ein lokales Extremum besitzt.

4. Lösen Sie folgende Schulbuchaufgabe auf zwei Arten, einmal mit und einmal ohne Lagrangesche Multiplikatoren.

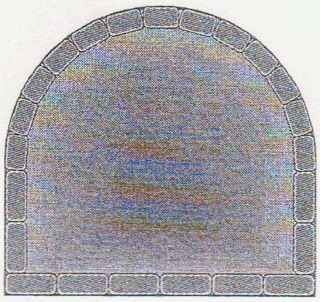

Fig. 2

15 Der Querschnitt eines unterirdischen Entwässerungskanals ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis (Fig. 2). Wie sind Breite und Höhe des Rechtecks zu wählen, damit die Querschnittsfläche $8\,\mathrm{m}^2$ groß ist und zur Ausmauerung des Kanals möglichst wenig Material benötigt wird?

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 06.07.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.