Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 11

1. Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ Banachräume. Sei $U \subset V$ offen und $\xi \in U$. Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to W$ in ξ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass auch die Funktion $f \cdot g$ in ξ differenzierbar ist und geben Sie eine Formel zur Berechnung von $D(f \cdot g)(\xi)$ an.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\alpha : C([0,1]) \to C([0,1]), f \mapsto f^2$$
differenzierbar ist und berechnen Sie $(D\alpha(f))(g)$ für $f, g \in C([0,1])$.

3. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Seien $U \subset \mathbb{R}^p$ und $V \subset \mathbb{R}^q$ offen und sei $\xi \in U$. Sei $g : U \to \mathbb{R}^q$ eine differenzierbare Funktion mit $g(U) \subset V$, und sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine in $g(\xi)$ differenzierbare Funktion. Sei $j \in \{1, ..., p\}$. Formulieren und beweisen Sie eine Formel, die angibt, wie sich $\partial_j(f \circ g)(\xi)$ aus den partiellen Ableitungen von f und denen der Komponentenfunktionen von g berechnen lässt.

4. Es sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x^2 y^3, ye^x).$$
Zeigen Sie, dass für alle $p, q \in \mathbb{R}^2$ mit $\|p\|_\infty < 1$ und $\|q\|_\infty < 1$ die Abschätzung
$$\|f(p) - f(q)\|_\infty \leq 2e\|p - q\|_\infty$$
gilt.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 22.06.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.