

Analysis II
Serie 10

1. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0, 0)$ existieren, aber f in $(0, 0)$ nicht stetig ist.

2. Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^p$ offen, $\xi \in U$ und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^q$. Sei $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. Die partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen von f und g in ξ mögen existieren. Zeigen Sie, dass auch die partiellen Ableitungen von h in ξ existieren und dass

$$\text{grad } h(\xi) = g(\xi)^T J_f(\xi) + f(\xi)^T J_g(\xi)$$

gilt.

3. Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \frac{x - y}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist.

(b) Untersuchen Sie die partiellen Ableitungen von f auf Stetigkeit.

(c) Untersuchen Sie die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$ und

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^{n-2}}.$$

Zeigen Sie, dass f zweimal partiell differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^n \partial_j^2 f(x) = 0.$$

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 15.06.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.