Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 8

Definition: Sei (M, d) metrischer Raum, $A \subset M$. Sei Y die Menge aller offenen Teilmengen von A. Dann heißt

$$\mathring{A} := \bigcup_{S \in Y} S$$

das Innere von A und

$$\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$$

der Rand von A.

1. Sei (M, d) metrischer Raum, $A \subset M$.
   (a) Zeigen Sie, dass $\partial A = \partial(M \backslash A)$.
   (b) Gilt allgemein $\overline{\mathring{A}} \subset \mathring{\overline{A}}$ oder $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{A}}$?

2. Seien $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Zeigen Sie, dass $(L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)})$ ein normierter Raum ist, der vollständig ist, falls $(W, \|\cdot\|_W)$ vollständig ist.

3. (a) Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset M$. Zeigen Sie, dass
   $$\overline{A} = A \cup \{x \in M : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$
   (b) Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Sei $f : M \to N$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jede Teilmenge A von M gilt:
   $$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

4. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Die Vektorräume $\mathbb{R}^p$ und $\mathbb{R}^q$ seien mit der Norm $\|\cdot\|_1$ versehen. Sei
   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{q1} & \dots & a_{qp} \end{pmatrix}$$
   eine reelle $(q \times p)$-Matrix und $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q,\ f(x) = Ax$. Berechnen Sie die Operatornorm von f.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 01.06.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.