Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 7

1. Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und sei $f : M \to M$. Es existiere $c \in (0, 1)$, so dass für alle $x, y \in M$
$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$
gilt. Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt besitzt, d.h., es existiert genau ein $\xi \in M$ mit $f(\xi) = \xi$.

   Hinweis: Man zeige, dass für $x_1 \in M$ die durch $x_n = f(x_{n-1})$ definierte Folge (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei
$$\Phi : C[a, b] \to \mathbb{R},\ f \mapsto \max_{x \in [a,b]} \operatorname{Re} f(x).$$
Für welche der Normen $\| \cdot \|_\infty$ und $\| \cdot \|_1$ auf $C[a, b]$ ist Φ stetig?

3. Es sei $A_1 = \{re^{it} : r > 0,\ 0 \leq t < \pi\}$, $A_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > (\operatorname{Re} z)^2\}$ und $A_3 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Untersuchen Sie die Mengen A_1, A_2, A_3 auf Offenheit und Abgeschlossenheit (in $\mathbb{C}$).
Falls $A_j \subset A_k$, untersuchen Sie auch, ob A_j offen oder abgeschlossen in A_k ist.

4. Es sei l_2 die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ konvergiert.
   (a) Zeigen Sie, dass für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ konvergiert.
   (b) Zeigen Sie, dass l_2 (versehen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation) ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$-Vektorraumes aller Folgen in $\mathbb{C}$ ist.
   (c) Zeigen Sie, dass durch
$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$
ein Skalarprodukt auf l_2 definiert wird.
   (d) **Zusatz:** Zeigen Sie, dass $(l_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ vollständig (also ein Hilbert-Raum) ist.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 25.05.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.