Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 6

1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $\phi : [0, L(\gamma)] \to [a, b]$ mit
$$L(\gamma \circ \phi|_{[0,s]}) = s$$
für alle $s \in [0, L(\gamma)]$ existiert.

   Hinweis. Konstruieren Sie zunächst ϕ^{-1}.

2. Es sei
$$\|\cdot\| : C^1([0, 1]) \to [0, \infty), f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
Zeigen Sie, dass gilt:

   (a) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $C^1([0, 1])$.

   (b) Der Raum $(C^1([0, 1]), \|\cdot\|)$ ist vollständig.

   (c) Die durch
$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$$
definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0, 1])$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen 0, aber nicht bezüglich $\|\cdot\|$.

3. Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume. Durch welche der folgenden Abbildungen $d_1, d_2, d_3 : M \times N \to [0, \infty)$ wird eine Metrik auf $M \times N$ definiert:
$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2), \\ d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_M(x_1, x_2) \cdot d_N(y_1, y_2), \\ d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= d_M(x_1, x_2) + d_N(y_1, y_2) + d_M(x_1, x_2) \cdot d_N(y_1, y_2)\ ? \end{aligned}$$
Dabei seien $x_1, x_2 \in M$ und $y_1, y_2 \in N$.

4. Ein Rad vom Radius $r > 0$ rolle auf einer ebenen Unterlage ab. Sei P der Berührpunkt von Rad und Unterlage. Bestimmen Sie die Kurve, die die Bewegung des Punktes P bei Drehung des Rades beschreibt. Bestimmen Sie die Länge des Wegs, den der Punkt P bei einer Umdrehung des Rades zurücklegt.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 18.05.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.