Analysis II
Serie 5

1. Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für $-\pi < x \leq \pi$ durch $f(x) = e^{|x|}$ gegeben ist. Was können Sie über die Konvergenz der Fourierreihe sagen?

2. Untersuchen Sie das uneigentliche Integral
$$\int_0^\infty \frac{\arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{1+x^2}\,dx$$
auf Konvergenz. Für welche $\alpha \in (0,\infty)$ konvergiert das uneigentliche Integral
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)^\alpha}\,dx?$$

3. Bestimmen Sie die Menge aller $\alpha \in (0,\infty)$, für die die Reihe
$$\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^\alpha}$$
konvergiert.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^n e^{ikx}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass für eine 2π-periodische, über kompakte Intervalle integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ das n-te Fourierpolynom $F_n(x)$ durch
   $$F_n(x) = \int_{-\pi}^\pi f(t)D_n(x-t)dt$$
   gegeben ist.

   (b) Zeigen Sie, dass unter den Voraussetzungen von (a) auch
   $$F_n(x) = \int_{-\pi}^\pi f(x-t)D_n(t)dt$$
   gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass $D_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{für } \frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}(2n+1) & \text{für } \frac{x}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

   Bemerkung. Die Funktion D_n heißt *Dirichlet-Kern.*

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 11.05.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.