Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 4

1. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \frac{3x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{(x^2+1)^2 x}\, dx.$$

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) e^{-ikx} dx = 0.$$

   Folgern Sie, dass für eine stückweise stetige 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{f}(k) = 0$$

   gilt.

   Hinweis. Zeigen Sie zunächst, dass

$$\int_a^b f(x) e^{-ikx} dx = -\int_{a-\frac{\pi}{k}}^{b-\frac{\pi}{k}} f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ikx} dx$$

   gilt. Schätzen Sie dann die Summe dieser Integrale ab.

3. Sei R eine rationale Funktion von zwei Veränderlichen. Zeigen Sie, dass das unbestimmte Integral $\int R(x, \sqrt{1+x^2}) dx$ durch die Substitution $t = x + \sqrt{1+x^2}$, $x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ in ein Integral $\int S(t)\, dt$ mit einer rationalen Funktion t überführt werden kann. Berechnen Sie für $a \in (0, \infty)$

$$\int_0^a \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

4. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Zeigen Sie, dass für das Restglied $R_n(x)$ der Taylorentwicklung um den Punkt 1

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

   gilt, falls $0 < x < 1$.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 04.05.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.