Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 3

1. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_1^4 \exp(\sqrt{x})\,dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^2 \frac{1-e^{-x}}{1+e^x}\,dx.$$

Definition. Sei K Körper. Eine Funktion $f : K^2 \to K$ der Form

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j$$

mit $m,n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in K$ für alle i und j heißt *Polynom* (in zwei Veränderlichen). Ein Quotient von Polynomen - definiert dort, wo der Nenner nicht verschwindet - heißt *rationale Funktion.*

2. (a) Sei R rationale Funktion in zwei Veränderlichen. Zeigen Sie, dass das unbestimmte Integral

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

durch die Substitution $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ in ein Integral der Form $\int S(t)dt$ mit einer rationalen Funktion S überführt werden kann.

(b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3-\cos x}\,dx$$

.

Zusatz. Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-\cos x}\,dx.$$

Hinweis zu a): Zeigen Sie zunächst, dass für $x \in (-\pi,\pi)$

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$$

gilt.

3. Berechnen Sie die folgenden, aus Schulbüchern entnommenen Integrale:

$$\int_1^{-\ln 2} \frac{e^{4x}}{e^{2x}+3}\,dx, \quad \int_e^{e^2} \frac{4}{x\ln x}\,dx \quad \text{und} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Seien $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$. Für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei

$$K(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Zeigen Sie:

(a) Ist f Polynom vom Grad höchstens 3, so gilt

$$K(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ und $K(f)$ sowie den numerischen Wert von

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - K(f)\right|$$

für $\quad f : [1, 4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp(\sqrt{x}).$

Bemerkung. Die beschriebene Regel zur Approximation von Integralen heißt „Keplersche Fassregel” und wird auch in Schulbüchern behandelt.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 27.04.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.