Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Analysis II
Serie 2

1. Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) < \varepsilon$ für alle Zerlegungen Z mit $|Z| < \delta$.

   Zusatz: Zeigen Sie, dass genau dann für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) < \varepsilon$ für alle Zerlegungen Z mit $|Z| < \delta$ existiert, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z mit $\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) < \varepsilon$ existiert. (Dies liefert mit obiger Aufgabe dann die Äquivalenz der Bedingungen (i) und (iii) aus Satz 5.1.6 der Vorlesung. Es folgt dann leicht, dass dies auch zu Bedingung (ii) äquivalent ist.)

2. Sei I kompaktes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Außerdem existiere $\alpha \in I$ mit $f(\alpha) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_I f(x)\, dx > 0.$$

   Zeigen Sie außerdem, dass es nicht genügt, f nur als integrierbar vorauszusetzen.

Definition: Seien $M, N \subset \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn ein $L \geq 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$ gilt. Man bezeichnet L als *Lipschitz-Konstante*.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Sei Z Zerlegung von $[a,b]$ mit zugehörigen Stützstellen ξ. Zeigen Sie, dass

$$\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) \leq (b-a)L|Z|$$

   und

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S(f,Z,\xi) \right| \leq (b-a)L|Z| \ .$$

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, so dass für jedes $k \in \{1, 2, ..., n\}$ eine stetige Funktion $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{C}$ mit $f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$ existiert.

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig. Zeigen Sie, dass f integrierbar ist.

Die Lösungen der ersten beiden Aufgaben sind bis zum Freitag, dem 20.04.2007, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.