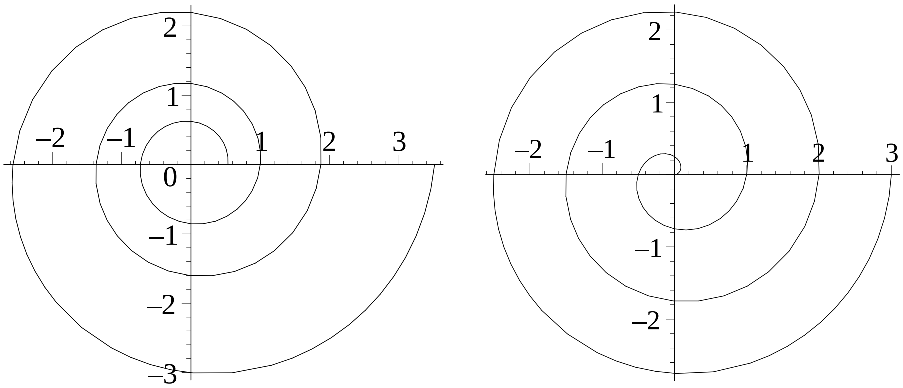

Abbildung 25: Logarithmische Spirale (links) und Archimedische Spirale (rechts).

3. Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Die Länge des Graphen von f ist die Länge der durch $t \mapsto (t, f(t)) = t + if(t)$ gegebenen Kurve. Für stetig differenzierbares f ist diese durch $\int_I \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$ gegeben.

Für die Länge L des Graphen des durch $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Parabelstücks gilt also

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

6 Topologie metrischer Räume

6.1 Metrik, Norm und Skalarprodukt

Bisher haben wir Funktionen $f : M \to N$ mit $M, N \subset \mathbb{R}, \mathbb{C}$ betrachtet. Jetzt werden wir allgemeinere Mengen M, N zulassen, etwa $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, oder auch Mengen von Funktionen. Wichtige Beispiele sind hier $C^n(I)$ und $C(I)$ mit einem Intervall I. Die genannten Mengen bilden Vektorräume. (Der Begriff des Vektorraums wird als aus der Linearen Algebra bekannt vorausgesetzt.) Wir benötigen aber noch weitere "Struktur" auf diesen Mengen.

Definition 6.1.1 Sei M nichtleere Menge. Eine Funktion $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt *Metrik*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (*Symmetrie*)

(iii) $d(x,y) + d(y,z) \le d(x,z)$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar (M, d) heißt dann *metrischer Raum*.

Beispiele. 1. $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$, $d(x,y) = |x-y|$. Wir nennen d die *euklidische Metrik* und $d(x,y)$ den *euklidischen Abstand* von x und y.

2. $M \neq \emptyset$ beliebig,

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y, \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Dies nennt man die *diskrete Metrik* auf M.

3. $M = \mathbb{C}$,

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{falls } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda x + \mu y = 0 \text{ existieren,} \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Liegen die Punkte x, y auf einer Geraden durch 0, so ist $d(x,y)$ also der euklidische Abstand. Andernfalls ist $d(x,y)$ die Summe der Abstände zu 0. (Aus naheliegenden Gründen nennt man das auch “französische Eisenbahnmetrik”.)

Weitere wichtige Beispiele metrischer Räume erhält man durch folgende Definition. Hier und im folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition 6.1.2 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ (also $x \mapsto \|x\|$) heißt *Norm*, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*Dreiecksungleichung*)

Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann *normierter Raum.*

Satz 6.1.1 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Dann ist die durch $d(x,y) := \|x-y\|$ definierte Funktion $d : V \times V \to [0,\infty)$ eine Metrik auf V, d. h., (V,d) ist metrischer Raum.*

Beweis. Seien $x, y, z \in V$. Dann gilt

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |(-1)| \cdot \|(y-x)\| = \|(y-x)\| = d(y,x)$$

und

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z). \quad \square$$

Beispiele. 1. $V = \mathbb{K}$, $\|x\| = |x|$ für $x \in V$.

2. $V = \mathbb{K}^p$ mit $p \in \mathbb{N}$, $\|x\|_\infty := \max_j |x_j|$ für

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)^T := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Wir werden Vektoren im Vektorraum K^p als Spaltenvektoren schreiben. Hier steht “T” für “transponiert”. Es ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum.

3. $V = \mathbb{K}^p$ mit $p \in \mathbb{N}$, $\|x\|_1 := \sum_{j=1}^p |x_j|$ für $x = (x_1, \ldots, x_p)^T \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_1)$ normierter Raum.

4. $V = C[a,b]$, $\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ für $f \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum. Die zugehörige Metrik d ist durch $d(f,g) := \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ gegeben.

5. $V = C[a,b]$, $\|f\|_1 := \int_a^b |f|$ für $f \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_1)$ normierter Raum. Die zugehörige Metrik d_1 ist durch $d_1(f,g) := \int_a^b |f-g|$ gegeben.

Die einzige Bedingung in Definition 6.1.2, die vielleicht nicht offensichtlich ist, ist "$\Leftarrow$" in (i). Wir zeigen dies durch Kontraposition. Sei dazu $f \in C[a,b]$, $f \neq 0$. Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) \neq 0$. Da f stetig, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon := \frac{1}{2}|f(\xi)|$ für $|x - \xi| < \delta$, $x \in [a,b]$. Mit $I := [a,b] \cap [\xi - \delta, \xi + \delta]$ folgt $|f(x)| \geq |f(\xi)| - |f(x) - f(\xi)| > |f(\xi)| - \varepsilon = \varepsilon$ für $x \in I$ und damit $\|f\|_1 = \int_a^b |f| \geq \int_I |f| \geq \varepsilon |I| > 0$.

6. Sei V der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen von $[a,b]$ nach $\mathbb{C}$ und sei $\|f\|_1 := \int_a^b |f|$ für $f \in V$. Dann ist $(V, \|\cdot\|_1)$ *kein* normierter Raum, denn Bedingung (i) aus Definition 6.1.2 gilt nicht, wie das Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = a, \\ 0 & \text{falls } a < x \leq b, \end{cases}$$

zeigt.

Definition 6.1.3 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Funktion $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to K$ (also $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$) heißt *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*), wenn für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden fünf Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$,

(ii) $\langle x,x\rangle \geq 0$,

(iii) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(iv) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$,

(v) $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.

Dabei steht der Querstrich in (i) für komplexe Konjugation. (Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ kann also darauf verzichtet werden.) Das Paar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ heißt *Prähilbertraum.*

Statt $\langle x,y\rangle$ sind auch die Schreibweisen $x \cdot y$ und (x,y) üblich.

Satz 6.1.2 *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prähilbertraum. Dann ist durch $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm auf V definiert, d. h., $(V, \|\cdot\|)$ ist normierter Raum.*

Wir stellen den Beweis von Satz 6.1.2 noch etwas zurück und betrachten zunächst zwei Beispiele.

Beispiel 1. Sei $V = \mathbb{K}^p$ mit $p \in \mathbb{N}$. Man rechnet leicht nach, dass mit $\langle x,y\rangle := \sum_{j=1}^p x_j \overline{y_j}$ für $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in V$ ein Skalarprodukt gegeben ist. (Dieses Skalarprodukt ist für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ das aus der Schule bekannte Skalarprodukt.) Die zugehörige Norm heißt *euklidische Norm* und wird mit $\|\cdot\|_2$ bezeichnet, also $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^p x_j \overline{x_j}} = \sqrt{\sum_{j=1}^p |x_j|^2}$. Die zugehörige Metrik heißt *euklidische Metrik.*

Beispiel 2. Sei $V = C[a,b]$ und $\langle f,g\rangle := \int_a^b f\overline{g}$. Die Skalarprodukteigenschaften sind einfach nachzurechnen; für (iii) vgl. Beispiel 5 nach Satz 6.1.1.

Wir ziehen einige einfache Folgerungen aus den Eigenschaften (i)-(v) von Definition 6.1.3. Dabei seien wieder $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$, denn $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\ \overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$,

(b) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,

(c) $\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$, denn $\langle 0, x\rangle = \langle 0-0, x\rangle = \langle 0, x\rangle - \langle 0, x\rangle = 0$.

Drei weitere wichtige Eigenschaften fassen wir in folgendem Satz zusammen.

Satz 6.1.3 *Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Prähilbertraum, $x, y \in V$. Dann gilt (mit $\|\cdot\|$ wie in Satz* 6.1.2*)*

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle$ *(Satz des Pythagoras).*

(ii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ *(Parallelogrammidentität).*

(iii) $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$ *(Cauchy-Schwarz-Ungleichung).*

Beweis. Die Beweise von (i) und (ii) erfolgen durch einfaches Ausrechnen des Ausdrucks $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle$ mit Hilfe von Bedingung (iv) und (v) aus Definition 6.1.3 sowie obiger Rechenregeln (b) und (c). Sie werden hier weggelassen.

Zum Beweis von (iii) notieren wir, dass für $\lambda \in \mathbb{K}$

$$0 \le \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - \lambda\langle y, x\rangle - \overline{\lambda}\langle x, y\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle$$

gilt. Mit $\lambda = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle / \|y\|^2$ folgt

$$0 \le \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle \cdot \langle y, x\rangle}{\langle y, y\rangle} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

und hieraus die Behauptung. □

Beweis von Satz 6.1.2. Seien $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

und

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und dem Satz des Pythagoras gilt

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \le \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

also die Dreiecksungleichung. □

Eine Analyse des Beweises zeigt, dass für $x, y \neq 0$ in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $x = \lambda y$ existiert. (Es gilt dann $\lambda = \langle x, y\rangle / \langle y, y\rangle$.) Gleichheit in der Dreiecksungleichung gilt genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{R}_+$ mit $x = \lambda y$ existiert.

6.2 Konvergenz

Definition 6.2.1 Sei (M, d) metrischer Raum und (a_n) Folge in M. Dann heißt (a_n) *konvergent*, falls $a \in M$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Dieses a heißt dann *Grenzwert* der Folge (a_n) und wir schreiben $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$).

Weiter heißt $b \in M$ *Häufungswert* von (a_n), falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, b) < \varepsilon$ existieren.

Diese Definition ist völlig analog zu den Definitionen 2.1.2 und 2.3.1 in Analysis I. Viele der dort gemachten Aussagen über Grenzwerte und Häufungswerte übertragen sich leicht. So gilt wieder die Aussage von Satz 2.1.1: *eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.* Es gilt auch wieder die Aussage von Satz 2.3.2:

(i) *a ist Häufungswert von (a_n) $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge von (a_n), die gegen a konvergiert.*

(ii) *a ist Grenzwert von (a_n) $\Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen von (a_n) konvergieren gegen a.*

Beispiel. Sei $V := C[a, b]$ und d die von der Norm $\|\cdot\|_\infty$ erzeugte Metrik, also $d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ für $f, g \in V$. Sei (f_n) Folge in V und $f \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& f_n \to f \text{ (bzgl. der Metrik in } V) \\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N \forall x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\
\Leftrightarrow\ & f_n \to f \text{ gleichmäßig}
\end{aligned}$$

Die folgende Definition ist analog zu Definition 2.3.3.

Definition 6.2.2 Sei (M, d) metrischer Raum und (x_n) Folge in M. Dann heißt (x_n) *Cauchyfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ und $n \geq N$ gilt, dass $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ist.

Vom Cauchykriterium für Folgenkonvergenz (Satz 2.3.5) gilt aber nur "eine Hälfte".

Satz 6.2.1 *Konvergente Folgen sind Cauchyfolgen.*

Beweis (vgl. Beweis zu Satz 2.3.5). Sei (M, d) metrischer Raum und sei (x_n) konvergente Folge in M, etwa $x_n \to \xi$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ folgt dann $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, \xi) + d(\xi, x_n) < \varepsilon$. $\square$

Die Umkehrung gilt nicht, wie etwa das Beispiel $M = \mathbb{Q}$ (mit der euklidischen Metrik) zeigt, und wie wir später an weiteren Beispielen sehen werden.

Definition 6.2.3 Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm konvergiert. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum* und ein vollständiger Prähilbertraum heißt *Hilbertraum*.

Beispiele. 1. $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig. Denn sei (f_n) Cauchyfolge in $C[a,b]$, d. h., (vgl. das Beispiel nach Definition 6.2.1)

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N}\, \forall x \in [a,b]\, \forall m,n \in \mathbb{N} : m \geq N \wedge n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchykriterium für Funktionenfolgen (Satz 3.7.1) folgt, dass (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ konvergiert. Nach Satz 3.7.2 ist $f \in C[a,b]$. Es folgt, dass (f_n) in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ gegen f konvergiert.

2. $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ ist nicht vollständig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $[a,b] = [-1,1]$. Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -1 \leq x \leq 0, \\ nx & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{falls } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

definierte Folge (f_n). Für $m > n$ gilt

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_m - f_n| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |f_m - f_n| \leq \frac{1}{n}$$

und damit ist (f_n) Cauchyfolge. Die Folge (f_n) ist aber nicht konvergent. Dies scheint intuitiv klar, da der der einzige "Kandidat" f für eine Grenzfunktion $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ erfüllen sollte, und damit in 0 nicht stetig sein kann.

Für einen formalen Beweis nehmen wir an, dass (f_n) konvergent ist, also $f_n \to f \in C[-1,1]$. Es existiert $\delta \in (0,1]$ mit $|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{4}$ für $|x| < \delta$. Es folgt

$$\|f - f_n\|_1 \geq \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} |f(x) - 1| dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} 1 - |f(0)| - |f(x) - f(0)| dx \geq \int_{\frac{1}{n}}^{\delta} \frac{1}{4} dx = \frac{\delta - \frac{1}{n}}{4}$$

für $|f(0)| \leq \frac{1}{2}$, $n \geq \frac{1}{\delta}$, und

$$\|f - f_n\|_1 \geq \int_{-\delta}^{0} |f(x)| dx \geq \int_{-\delta}^{0} \frac{1}{4} dx = \frac{\delta}{4}$$

für $|f(0)| > \frac{1}{2}$. In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch.

3. $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ ist vollständig (für $p \in \mathbb{N}$). Denn sei (x^k) Cauchyfolge in $\mathbb{K}^p$, mit $x^k = (x_1^k, \ldots, x_p^k)$. Wegen $|x_j^k - x_j^\ell| \leq \|x^k - x^\ell\|_\infty$ für $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $j \in \{1, \ldots, p\}$ folgt, dass $(x_j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $j \in \{1, \ldots, p\}$ eine Cauchyfolge ist, und damit also konvergent, etwa $x_j^k \to \xi_j$. Mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ folgt dann

$$\|x^k - \xi\|_\infty = \max_j |x_j^k - \xi_j| \to 0,$$

also $x^k \to \xi$ für $k \to \infty$.

Genauso kann man zeigen, dass $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_1)$ und $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_2)$ vollständig sind. Dies kann man sich aber auch an Hand des folgenden Begriffes überlegen.

Definition 6.2.4 Sei V Vektorraum über $\mathbb{K}$ und seien $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ Normen auf V. Dann heißen $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ *äquivalent*, falls $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ existieren, so dass $\alpha\|x\|' \leq \|x\|'' \leq \beta\|x\|'$ für alle $x \in V$ gilt.

Sind die Normen $\|\cdot\|'$ und $\|\cdot\|''$ auf dem Vektorraum V äquivalent, so ist eine Folge (x_n) in V offensichtlich genau dann konvergent (bzw. Cauchyfolge) in $(V, \|\cdot\|')$, wenn sie konvergent (bzw. Cauchyfolge) in $(V, \|\cdot\|'')$ ist. Leicht rechnet man nun nach, dass in $\mathbb{K}^p$ die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_\infty$ sind. Hieraus folgt, dass mit $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_\infty)$ auch $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_1)$ und $(\mathbb{K}^p, \|\cdot\|_2)$ vollständig sind.

Schließlich notieren wir noch das folgende Analogon zu Definition 3.3.1.

Definition 6.2.5 Sei (M, d) metrischer Raum, $A \subset M$ und $\xi \in M$. Dann heißt ξ *Häufungspunkt* von A, falls eine Folge (a_n) in $A \backslash \{\xi\}$ mit $a_n \to \xi$ existiert.

6.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 6.3.1 Sei (M, d) metrischer Raum und $x \in M$. Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ heißt dann $U(x, \varepsilon) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$ die *ε-Umgebung* von x. Sei weiter $A \subset M$. Existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U(x, \varepsilon) \subset A$, so heißt A *Umgebung* von x. Weiter heißt A *offen*, falls A Umgebung jedes Punktes von A ist, und A heißt *abgeschlossen*, falls $M \backslash A$ offen ist.

Die Bezeichnungen für die ε-Umgebung sind in der Literatur sehr uneinheitlich, statt $U(a, \varepsilon)$ findet man auch $B(a, \varepsilon)$, $K(a, \varepsilon)$, $D(a, \varepsilon)$, $U_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(a)$, $K_\varepsilon(a)$ und anderes.

Sei (M, d) metrischer Raum und $N \subset M$. Dann ist auch $(N, d|(N \times N))$ metrischer Raum. Für $A \subset N$ können wir Offenheit und Abgeschlossenheit außer in (M, d) jetzt auch in $(N, d|(N \times N))$ betrachten. Wir sagen dann, dass A *relativ offen (bzw. abgeschlossen) in* N ist. Den Zusatz "relativ" lassen wir dabei in der Regel weg.

Aus der Offenheit von A in M folgt die Offenheit von A in N. Allgemeiner gilt:

Satz 6.3.1 *Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset N \subset M$. Dann ist A offen in N genau dann, wenn ein (in M) offenes $B \subset M$ mit $A = B \cap N$ existiert.*

Beweis. Wir bezeichnen die ε-Umgebungen in M bzw. N mit $U_M(\cdot, \varepsilon)$ bzw. $U_N(\cdot, \varepsilon)$. Dann gilt $U_N(x, \varepsilon) = U_M(x, \varepsilon) \cap N$ für alle $x \in N$. Aus $U_M(x, \varepsilon) \subset B$ folgt also $U_N(x, \varepsilon) \subset B \cap N$ und damit "$\Leftarrow$".

Um "$\Rightarrow$" zu zeigen, sei A offen in N. Für jedes $x \in A$ existiert dann $\varepsilon_x > 0$ mit $U_N(\varepsilon_x, x) \subset A$. Hieraus erhält man $A = \bigcup_{x \in A} U_N(\varepsilon_x, x)$ und damit leistet $B := \bigcup_{x \in A} U_M(\varepsilon_x, x)$ das Verlangte.

Satz 6.3.2 (i) *Vereinigungen offener Mengen sind offen und Durchschnitte von endlich vielen offenen Mengen sind offen.*

(ii) *Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen und Vereinigungen von endlich vielen abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. (i). Sei M Menge offener Mengen und $V = \bigcup_{U \in M} U$. Zu zeigen ist, dass V offen ist. Sei dazu $\xi \in V$. Dann existiert $U \in M$ mit $\xi \in U$. Damit ist U Umgebung von ξ, und wegen $V \supset U$ also auch V Umgebung von ξ.

Seien jetzt $U_1, \ldots, U_n$ offen und $V = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Sei $\xi \in V$. Dann ist $\xi \in U_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ und damit existiert $\varepsilon_j > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon_j) \subset U_j$. Mit $\varepsilon :=$

$\min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ folgt $U(\xi, \varepsilon) \subset U_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, also $U(\xi, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{n} U_j = V$. Also ist V offen.

(ii). Dies folgt aus (i) und den Regeln von de Morgan. $\square$

Beispiele. 1. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist das offene Intervall (a, b) offen in $\mathbb{R}$, aber nicht offen in $\mathbb{C}$. Denn bezeichnen wir mit $U(x, \varepsilon)$ die ε-Umgebung in $\mathbb{C}$, so gilt folgt mit $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$, dass $U(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$. Andererseits ist (a, b) nicht offen in $\mathbb{C}$, da für $x \in (a, b)$ und $\varepsilon > 0$ ja $x + \frac{1}{2}\varepsilon i \in U(x, \varepsilon) \setminus (a, b)$ gilt. Entsprechendes gilt für Intervalle $(-\infty, b)$ und (a, ∞).

2. Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen in $\mathbb{R}$ (und damit auch in $\mathbb{C}$).

Satz 6.3.3 *Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset M$. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist abgeschlossen.*

(ii) *Für jede konvergente Folge in A ist auch ihr Grenzwert in A.*

(iii) *A enthält alle seine Häufungspunkte.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei A abgeschlossen und (x_n) Folge in A mit $x_n \to \xi$. Zu zeigen ist, dass $\xi \in A$. Dazu nehmen wir an, dass $\xi \in M \setminus A$. Da $M \setminus A$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset M \setminus A$, also $|x - \xi| \geq \varepsilon$ für alle $x \in A$, insbesondere damit $|x_n - \xi| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $x_n \not\to \xi$, ein Widerspruch.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei ξ Häufungspunkt von A. Dann existiert eine Folge (x_n) in $A \setminus \{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$. Es folgt $\xi \in A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Wir nehmen an, dass A nicht abgeschlossen ist, also $M \setminus A$ nicht offen ist. Dann existiert $\xi \in M \setminus A$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, dass $U(\xi, \varepsilon) \not\subset M \setminus A$, also $U(\xi, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Insbesondere existiert dann $x_n \in U\left(\xi, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Es folgt $x_n \to \xi$. Da $x_n \in A \setminus \{\xi\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist ξ Häufungspunkt von A, also $\xi \in A$, ein Widerspruch. $\square$

Definition 6.3.2 Sei (M, d) metrischer Raum und $A \subset M$. Sei X die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von M, die A enthalten. Dann heißt

$$\overline{A} := \bigcap_{T \in X} T$$

der *Abschluss* von A.

Nach Satz 6.3.2 ist $\overline{A}$ abgeschlossen. Damit ist $\overline{A}$ also die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält. Es gilt

$$\overline{A} = A \cup \{x \in M : x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

Satz 6.3.4 *Sei (M, d) vollständiger metrischer Raum und $A \subset M$ abgeschlossen. Dann ist A vollständig (d. h., $(A, d|(A \times A))$ ist vollständiger metrischer Raum).*

Beweis. Ist (x_n) Cauchfolge in A, so ist (x_n) Cauchfolge in M, also gilt $x_n \to \xi$ für ein $\xi \in M$. Mit Satz 6.3.3 folgt $\xi \in A$. $\square$

6.4 Stetigkeit

Definition 6.4.1 Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und sei $f : M \to N$ eine Funktion. Sei $\xi \in M$. Dann heißt f *stetig in* ξ, falls für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$ gilt, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Für $A \subset M$ heißt f stetig in A, falls f stetig in jedem Punkt von A ist. Schließlich heißt f stetig, wenn f stetig in M ist.

Für $M, N \subset \mathbb{C}$, mit der euklidischen Metrik versehen, ist dies genau Definition 3.1.1. Die Sätze 3.1.1 und 3.1.2 übertragen sich unmittelbar:

Satz 6.4.1 *Seien $(M, d_M), (N, d_N), (P, d_P)$ metrische Räume und seien $g : M \to N$ stetig (in $\xi \in M$) und $f : N \to P$ stetig (in $g(\xi) \in g(M)$). Dann ist $f \circ g$ stetig (in ξ).*

Satz 6.4.2 *Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume, $\xi \in M$ und $f : M \to N$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für jedes $x \in M$ mit $d_M(x, \xi) < \delta$ gilt, dass $d_N(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$ ist.*

Beispiel. Sei (M, d) metrischer Raum, $A \subset M$ und $f : A \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \inf_{a \in A} d(a, x)$. Es ist also $f(x)$ der Abstand von x zur Menge A.

Behauptung. f ist stetig.

Beweis. Sei $x, y \in M$ und $a \in A$. Dann gilt $d(x, a) \le d(x, y) + d(y, a)$ und damit $f(x) \le d(x, y) + f(y)$. Es folgt $f(x) - f(y) \le d(x, y)$ und aus Symmetriegründen auch $f(y) - f(x) \le d(x, y)$, also $|f(y) - f(x)| \le d(x, y)$. Die Stetigkeit von d folgt jetzt aus Satz 6.4.2. (Man kann dort $\delta := \varepsilon$ wählen.) $\square$

Satz 6.4.3 *Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und $f : M \to N$. Dann gilt:*

(i) *Sei $\xi \in M$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(\xi)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von ξ ist.*

(ii) *Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn für jedes offene $U \subset N$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen ist.*

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung der Stetigkeit durch die ε-δ-Bedingung (Satz 6.4.2 bzw. Satz 3.1.2).

Wir beweisen zunächst (i): "$\Rightarrow$". Sei f stetig in ξ und sei U Umgebung von $f(\xi)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(f(\xi), \varepsilon) \subset U$. Da f stetig in ξ ist, existiert $\delta > 0$ mit $d_N(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $d_M(x, \xi) < \delta$. Es folgt $f(x) \in U(f(\xi), \varepsilon) \subset U$ für alle $x \in M$ mit $d_M(x, \xi) < \delta$, also $U(\xi, \delta) \subset f^{-1}(U)$, und damit ist $f^{-1}(U)$ Umgebung von ξ.

"$\Leftarrow$". Sei $\varepsilon > 0$. Da $U(f(\xi), \varepsilon)$ Umgebung von $f(\xi)$ ist, ist $f^{-1}(U(f(\xi), \varepsilon))$ Umgebung von ξ. Damit existiert $\delta > 0$ mit $U(\xi, \delta) \subset f^{-1}(U(f(\xi), \varepsilon))$. Für $x \in M$ mit $d_M(x, \xi) < \delta$ gilt nun $x \in U(\xi, \delta) \subset f^{-1}(U(f(\xi), \varepsilon))$, also $f(x) \in U(f(\xi), \varepsilon)$ und damit $d_N(f(x), f(\xi)) < \varepsilon$.

Behauptung (ii) folgt leicht aus (i). $\square$

In Satz 2.2.1 wurde für Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gezeigt, dass $a_n + b_n \to a + b$ und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$ gilt. Hieraus wurde in §3.1 die Stetigkeit von Summe und Produkt stetiger Funktionen gefolgert. Entsprechende Aussagen gelten auch hier wieder (wobei die Beweise analog sind).

Satz 6.4.4 *Sei (M,d) metrischer Raum, $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum (über $\mathbb{K}$), $\xi \in M$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g : M \to V$ stetig in ξ. Dann sind $f+g$ und $\lambda \cdot f$ stetig in ξ. Ist speziell $V = \mathbb{K}$ und $\|\cdot\| = |\cdot|$, so ist auch $f \cdot g$ stetig in ξ. Im Falle $g(\xi) \neq 0$ ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in ξ.*

Wir untersuchen Abbildungen $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ auf Stetigkeit bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Für $j \in \{1, \dots, p\}$ heißt die durch $\pi_j(x_1, \dots, x_p) = x_j$ gegebene Abbildung $\pi_j : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ die *Projektion* auf die j-te Koordinate. Offensichtlich ist π_j stetig. (Man wähle $\delta := \varepsilon$ in Satz 6.4.2.) Nach Satz 6.4.4 sind dann auch Funktionen f der Form

$$f(x_1, \dots, x_p) = \sum_{(k_1,\dots,k_p) \in I} a_{k_1,\dots,k_p} x_1^{k_1} \cdot \dots \cdot x_p^{k_p}$$

stetig, wobei $I \subset \mathbb{N}_0^p$ endlich und $a_{k_1,\dots,k_p} \in \mathbb{K}$ für $(k_1, \dots, k_p) \in I$. Solche Funktionen heißen *Polynome* (in p Veränderlichen). Quotienten von Polynomen heißen *rationale Funktionen*. Sie sind dort definiert, wo der Nenner nicht verschwindet.

Wir untersuchen jetzt Abbildungen $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ auf Stetigkeit, wieder bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ (sowohl im Definitions- wie im Zielbereich). Für $j \in \{1, \dots, q\}$ heißt $f_j := \pi_j \circ f$ die j-te *Koordinatenfunktion*. Es ist also $f(x) = (f_1(x), \dots, f_q(x))^T$ für $x \in \mathbb{K}^p$.

Satz 6.4.5 *Eine Funktion von $\mathbb{K}^p$ nach $\mathbb{K}^q$ ist genau dann stetig (in $\xi \in \mathbb{K}^p$), wenn alle ihre Koordinatenfunktionen stetig (in ξ) sind.*

Beweis. Sei $f = (f_1, \dots, f_q)^T : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$.

"$\Rightarrow$". Dies folgt aus Satz 6.4.1, da $f_j = \pi_j \circ f$ und π_j stetig.

"$\Leftarrow$". Es seien alle f_j stetig in ξ. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu $j \in \{1, \dots, q\}$ ein $\delta_j > 0$ mit $|f_j(x) - f_j(\xi)| < \varepsilon$ für $\|x - \xi\|_\infty < \delta_j$. Mit $\delta := \min_j \delta_j$ folgt $\|f(x) - f(\xi)\|_\infty = \max_j |f_j(x) - f_j(\xi)| < \varepsilon$ für $\|x - \xi\|_\infty < \delta$. $\Box$

Man könnte nun vermuten, dass eine Funktion $f = (f_1, \dots, f_q)^T : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ stetig ist, wenn sie für jedes j bei festgehaltenem $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p$ stetig in x_j ist. Dies ist aber nicht der Fall.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dann ist f unstetig in $(0,0)$, da $f(x,x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, aber $f(0,0) = 0$. Wird eine Variable festgehalten, ist f aber stetig in der anderen.

Es folgt aus Satz 6.4.5, dass lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^p$ nach $\mathbb{K}^q$ stetig sind, da jede Koordinatenfunktion ein Polynom ist. Denn ist $f = (f_1, \dots, f_q) : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^q$ linear, so existieren $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \le i \le q$, $1 \le j \le p$, mit $f_i(x_1, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j$. Entscheidend dabei ist, dass $\mathbb{K}^p$ und $\mathbb{K}^q$ endlichdimensional sind. Lineare Abbildungen zwischen unendlichdimensionalen normierten Räumen brauchen nicht stetig zu sein.

Beispiel. Es ist $(C^1[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$ normierter Raum und $L : C^1[-1,1] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f'(0)$ ist linear. Mit $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx$ gilt $\|f_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$, also $f_n \to 0$, aber $L(f_n) = f_n'(0) = \cos n0 = 1 \neq 0 = L(0)$. Damit ist L nicht stetig.

Definition 6.4.2 (vgl. Definition 3.6.2) Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume und $f : M \to N$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig*, falls zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ mit $d_M(x, y) < \delta$ gilt, dass $d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ist.

Satz 6.4.6 *Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und sei $f : V \to W$ linear. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist gleichmäßig stetig,*

(ii) *f ist stetig,*

(iii) *f ist stetig in* 0,

(iv) $\exists C \in \mathbb{R}_+ \forall x \in V : \|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V$.

Beweis. Wir zeigen, dass (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i). Dabei ist (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) trivial.

zu (iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei f stetig in 0. Zu $\varepsilon := 1$ existiert dann $\delta > 0$ mit $\|f(x)\|_W \leq 1$ für $\|x\|_V \leq \delta$. Für $x \in V \setminus \{0\}$ folgt dann

$$\|f(x)\|_W = \frac{\|x\|_V}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta}{\|x\|_V} x\right) \right\|_W \leq \frac{\|x\|_V}{\delta}.$$

Mit $C := \frac{1}{\delta}$ folgt also $\|f(x)\|_W \leq C\|x\|_V$, und das gilt auch für $x = 0$.

zu (iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $\varepsilon > 0$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$. Für $x, y \in V$ mit $\|x - y\|_V < \delta$ gilt dann $\|f(x) - f(y)\|_W = \|f(x - y)\|_W \leq C\|x - y\|_V < \varepsilon$. $\square$

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $L(V, W)$. Nach Satz 6.4.6, (iv), ist für $f \in L(V, W)$

$$\|f\|_{L(V,W)} := \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \|f(x)\|_W < \infty.$$

Man nennt $\|f\|_{L(V,W)}$ *Operatornorm* von f. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass $(L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)})$ normierter Raum ist. Darüberhinaus ist $(L(V, W), \|\cdot\|_{L(V,W)})$ Banachraum, falls $(W, \|\cdot\|_W)$ Banachraum ist.

Beispiel. Sei $(V, \|\cdot\|_V) = (\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$, $(W, \|\cdot\|_W) = (\mathbb{R}^q, \|\cdot\|_\infty)$, $f = (f_1, \ldots, f_q)^T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Dann existieren $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$, mit $f_i(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{j=1}^p a_{ij} x_j$ für alle i. In Matrixschreibweise haben wir also

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & \ldots & a_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Nun ist für $x = (x_1, \ldots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$

$$|f_i(x_1, \ldots, x_p)| \leq \sum_{j=1}^p |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^p |a_{ij}|$$

für alle i und damit

$$\|f(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty \max_i \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

Wählt man, bei festem i, nun $x_j = \pm 1$, so dass x_j und a_{ij} das gleiche Vorzeichen haben, so hat man in obiger Abschätzung Gleichheit. Es folgt

$$\|f\|_{L(V,W)} = \max_i \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}|.$$

Man nennt dies auch die *Zeilensummennorm* der Matrix $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq q\\ 1\leq j\leq p}}$.

Definition 6.4.3 (vgl. Definition 3.3.2) Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume, ξ Häufungspunkt von M und $f : M \to N$. Wir sagen, dass $f(x)$ *für* $x \to \xi$ *konvergiert*, falls $\eta \in N$ existiert, so dass für jede Folge (x_n) in $M\backslash\{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$ auch $f(x_n) \to \eta$ gilt. Dieses η heißt dann *Grenzwert* von f für $x \to \xi$ und wird mit $\lim_{x\to\xi} f(x)$ bezeichnet. Wir schreiben auch $f(x) \to \eta$ für $x \to \xi$.

Wie in Satz 3.3.1 sehen wir, dass f genau dann stetig in ξ ist, wenn $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ gilt.

Auch Satz 3.3.3 gilt entsprechend: *Es gilt* $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ *genau dann, wenn*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists\delta \in \mathbb{R}_+ \forall x \in M\backslash\{\xi\} : d_M(x, \xi) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), \eta) < \varepsilon.$$

6.5 Kompaktheit

Definition 6.5.1 Sei (M, d) metrischer Raum.

(i) (M, d) heißt *kompakt*, falls jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt.

(ii) (M, d) heißt *totalbeschränkt* (oder *präkompakt*), falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine endliche Teilmenge E von M existiert, so dass $M \subset \bigcup_{x\in E} U(x, \varepsilon)$.

(iii) (M, d) heißt *beschränkt*, falls $\sup_{x,y\in M} d(x, y) < \infty$.

Kurz sagen wir auch, dass M (statt (M, d)) kompakt bzw. (total)beschränkt ist. Für $K \subset M$ sagen wir, dass K kompakt bzw. (total)beschränkt ist, wenn der metrische Raum $(K, d|(K \times K))$ diese Eigenschaft hat.

Teil (i) obiger Definition entspricht damit Definition 3.6.1. Statt die Existenz einer konvergenten Teilfolge zu fordern, kann man natürlich auch die Existenz eines Häufungswertes fordern; vgl. Satz 2.3.2, (i).

Aus der Totalbeschränktheit folgt die Beschränkheit, denn aus

$$M \subset \bigcup_{x\in E} U(x, \varepsilon)$$

folgt $d(a, b) \leq \max_{x,y\in E} d(x, y) + 2\varepsilon$ für $a, b \in M$.

Sind I, M nichtleere Mengen, so nennt man eine durch $i \mapsto x_i$ gegebene Funktion von I nach M auch *Familie* und bezeichnet sie mit $(x_i)_{i\in I}$. (Für $I = \mathbb{N}$ sind dies Folgen.)

Definition 6.5.2 Sei (M,d) metrischer Raum, $K \subset M$ und $(U_i)_{i\in I}$ eine Familie offener Teilmengen von M mit $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$. Dann heißt $(U_i)_{i\in I}$ eine *offene Überdeckung* von K. Existiert eine endliche Teilmenge $E \subset I$ mit $K \subset \bigcup_{i\in E} U_i$, so sagt man, dass $(U_i)_{i\in I}$ eine *endliche Teilüberdeckung* besitzt.

Die Totalbeschränktheit besagt also, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Überdeckung $(U(x,\varepsilon))_{x\in M}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Satz 6.5.1 *Sei (M,d) metrischer Raum und $K \subset M$. Dann sind äquivalent:*

(i) *jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung,*

(ii) *K ist kompakt,*

(iii) *K ist vollständig und totalbeschränkt.*

Die Äquivalenz von (i) und (ii) heißt auch *Satz von Heine-Borel.*

In sogenannten *topologischen Räumen* – die eine Verallgemeinerung der metrischen Räume sind – gilt Satz 6.5.1 nicht. Dort wird die in (i) formulierte Eigenschaft als Kompaktheit bezeichnet und die in Definition 6.5.1, (i), angegebene als Folgenkompaktheit.

Beweis von Satz 6.5.1. zu (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) Folge in K, die keine konvergente Teilfolge (und damit also auch keinen Häufungswert) besitzt. Dann ist $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich.

Sei nun $y \in K$. Da y kein Häufungswert von (x_n) ist, existiert $\varepsilon_y \in \mathbb{R}_+$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $d(x_n, y) \geq \varepsilon_y$ für alle $n \geq N$ gilt. Folglich ist $A \cap U(y, \varepsilon_y)$ endlich.

Nun ist $(U(y,\varepsilon_y))_{y\in K}$ offene Überdeckung von K. Nach (i) existiert nun eine endliche Teilüberdeckung, d. h., es existiert eine endliche Teilmenge E von K mit $K \subset \bigcup_{y\in E} U(y,\varepsilon_y)$. Es folgt $A = A \cap K \subset \bigcup_{y\in E} A \cap U(y,\varepsilon_y)$. Damit ist A endlich, ein Widerspruch.

zu (ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei K kompakt. Wir zeigen zuerst, dass K vollständig ist. Sei dazu (x_n) Cauchyfolge in K. Dann hat (x_n) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}), etwa $x_{n_k} \to \xi \in K$. Wir zeigen, dass $x_n \to \xi$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da (x_n) Cauchyfolge ist, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Da $x_{n_k} \to \xi$ existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_k}, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$. Sei nun $k \geq K$ mit $n_k \geq N$. Für $n \geq N$ folgt dann $d(x_n, \xi) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \xi) < \varepsilon$. Es gilt also $x_n \to \xi$.

Wir zeigen jetzt, dass K totalbeschränkt ist. Dazu nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $K \not\subset \bigcup_{x\in E} U(x,\varepsilon)$ für jede endliche Teilmenge E von K. Es sei nun $x_1 \in K$ beliebig. Dann gilt $K \not\subset U(x_1,\varepsilon)$ und damit existiert $x_2 \in K \setminus U(x_1,\varepsilon)$. Wegen $K \not\subset U(x_1,\varepsilon) \cup U(x_2,\varepsilon)$ existiert $x_3 \in K \setminus (U(x_1,\varepsilon) \cup U(x_2,\varepsilon))$. Induktiv findet man so eine Folge (x_n) in K mit $x_{n+1} \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U(x_j,\varepsilon)$. Es folgt $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$ für $m \neq n$. Dies impliziert, dass keine Teilfolge von (x_n) eine Cauchyfolge ist. Damit konvergiert aber auch keine Teilfolge von (x_n), ein Widerspruch.

zu (iii) $\Rightarrow$ (i): Sei $(U_i)_{i\in I}$ offene Überdeckung von K. Wir nehmen an, dass keine endliche Teilüberdeckung existiert.

Wegen der Totalbeschränktheit existiert eine endliche Teilmenge E_1 von K mit $K \subset \bigcup_{x\in E_1} U(x, \frac{1}{2})$. Nun ist $(U_i)_{i\in I}$ auch offene Überdeckung von $K \cap U(x, \frac{1}{2})$ für alle $x \in K$. Es folgt, dass $x_1 \in E_1$ existiert, so dass keine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U(x_1, \frac{1}{2})$ existiert.

Wegen der Totalbeschränktheit existiert weiter eine endliche Teilmenge E_2 von K mit $K \cap U(x_1, \frac{1}{2}) \subset \bigcup_{x \in E_2} U(x, \frac{1}{4})$. Dabei kann man $U(x_1, \frac{1}{2}) \cap U(x, \frac{1}{4}) \neq \emptyset$, also $d(x_1, x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, für alle $x \in E_2$ annehmen. Es existiert nun $x_2 \in E_2$, so dass keine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U(x_2, \frac{1}{4})$ existiert.

Induktiv findet man so eine Folge (x_n), so dass keine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U(x_n, \frac{1}{2^n})$ existiert und außerdem

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}}$$

gilt. Für $m > n$ folgt

$$d(x_n, x_m) < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{3}{2^k} = \frac{3}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{3}{2^n}.$$

Damit ist (x_n) Cauchyfolge und wegen der Vollständigkeit von K also konvergent, etwa $x_n \to \xi \in K$. Da $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von K ist, existiert $i_0 \in I$ mit $\xi \in U_{i_0}$.

Nun existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset U_{i_0}$. Für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ ist $d(x_n, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$K \cap U\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subset U\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right) \subset U\left(\xi, d(x_n, \xi) + \frac{1}{2^n}\right) \subset U(\xi, \varepsilon) \subset U_{i_0}.$$

Damit existiert eine endliche Teilüberdeckung von $K \cap U\left(x_n, \frac{1}{2^n}\right)$, ein Widerspruch. □

Satz 6.5.2 (i) *Kompakte Mengen sind beschränkt und abgeschlossen.*

(ii) *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis. Sei K kompakt (im metrischen Raum (M, d)).

zu (i): Zunächst ist K wegen Satz 6.5.1 totalbeschränkt und damit auch beschränkt.

Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, benutzen wir Satz 6.2.1. Sei dazu (x_n) Folge in K mit $x_n \to \xi \in M$. Zu zeigen ist, dass $\xi \in K$. Dies folgt aber, da (x_n) Cauchyfolge und K nach Satz 6.5.1 vollständig ist.

zu (ii): Sei $A \subset K$ abgeschlossen. Wir geben zwei Beweise, dass A kompakt ist.

Beweisvariante 1. Sei (x_n) Folge in A. Dann besitzt (x_n) eine Teilfolge, die in K konvergiert, etwa $x_{n_k} \to \xi \in K$. Da A abgeschlossen, folgt mit Satz 6.2.1, dass $\xi \in A$. Also ist A kompakt.

Beweisvariante 2. Sei $(U_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A. Da $M \backslash A$ offen ist, ist dann durch $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \cup M \backslash A$ eine offene Überdeckung von K gegeben. Damit existiert eine endliche Teilmenge $E \subset I$ mit $K \subset \bigcup_{i \in E} U_i \cup M \backslash A$, also $A \subset \bigcup_{i \in E} U_i$. □

Wir werden gleich an einem Beispiel sehen, dass die Umkehrung von Satz 6.5.2, (i), nicht gilt. Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 6.5.3 *Sei $p \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^p$. Bezüglich der durch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ erzeugten Metrik ist K genau dann kompakt, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.*

Auch dieser Satz wird nach Heine und Borel benannt. Er gilt auch für andere Normen in $\mathbb{R}^p$; siehe Satz 6.5.6 später.

Beweis von Satz 6.5.3. "$\Rightarrow$". Satz 6.5.2, (i).

"$\Leftarrow$". Nach Satz 6.5.1 reicht es zu zeigen, dass K vollständig und totalbeschränkt ist. Die Vollständigkeit folgt dabei wegen Satz 6.3.4 (und der Vollständigkeit von $\mathbb{R}^p$) unmittelbar aus der Abgeschlossenheit.

Wegen der Beschränktheit von K existiert $r \in \mathbb{R}_+$ mit $\|x\|_\infty \leq r$ für alle $x \in K$. Ist dann $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $N\varepsilon \geq r$, so folgt

$$K \subset \bigcup_{j_1,\dots,j_n=-N}^{N} U((j_1\varepsilon,\dots,j_n\varepsilon),\varepsilon)$$

und damit die Totalbeschränktheit von K. $\square$

Beispiel. Wir betrachten den Prähilbertraum $(C[0,2\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ und bezeichnen die zugehörige Norm mit $\|\cdot\|_2$. Wie in §5.6 sei $e_n \in C[0,2\pi]$ definiert durch $e_n(x) = e^{inx}$, für $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt, vgl. §5.6,

$$\langle e_n, e_m\rangle = \int_0^{2\pi} e_n\overline{e_m} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = 0$$

für $n \neq m$ und $\|e_n\|_2 = \sqrt{\langle e_n, e_m\rangle} = \sqrt{2\pi}$. Nach dem Satz von Pythagoras ist damit $\|e_n - e_m\|_2^2 = \|e_n\|_2^2 + \|e_m\|_2^2 = 4\pi$, also $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{4\pi}$.

Wir betrachten jetzt $K := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist K offensichtlich beschränkt. Außerdem ist K abgeschlossen, denn ist (x_k) eine Folge in K, die in $(C[0,2\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ konvergiert, so existieren $M, N \in \mathbb{N}$ mit $x_k = e_N$ für $k \geq M$.

Andererseits ist K nicht kompakt, da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt. Es folgt, dass die Umkehrung von Satz 6.5.2, (i), im allgemeinen gilt.

Satz 6.5.4 *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, $K \subset M$ kompakt und $f : K \to N$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.*

Für $M = N = \mathbb{C}$ (mit euklidischer Metrik) ist dies Satz 3.6.3. Der dortige Beweis kann wörtlich übernommen werden.

Ebenso überträgt sich Satz 3.6.4:

Satz 6.5.5 *Sei (M, d) metrischer Raum, $K \subset M$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an.*

Satz 6.5.6 *Alle Normen auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^p$ (mit $p \in \mathbb{N}$) sind äquivalent.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass jede Norm äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ ist. Sei also $\|\cdot\|$ Norm auf $\mathbb{R}^p$.

Sei $\{e_1,\dots,e_p\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^p$. Mit $\beta := \sum_{j=1}^p \|e_j\|$ ist dann

$$\|x\| = \left\|\sum_{j=1}^p x_je_j\right\| \leq \sum_{j=1}^p |x_j|\|e_j\| \leq \beta\|x\|_\infty$$

für $x = (x_1, \dots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$. Insbesondere folgt, dass die durch $x \mapsto \|x\|$ gegebene Abbildung von $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ nach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ stetig ist; vgl. auch Satz 6.4.6. Da $K := \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_\infty = 1\}$ beschränkt und abgeschlossen und damit kompakt in $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ ist, existiert deshalb nach Satz 6.4.5 ein $\xi \in K$ mit $\alpha := \|\xi\| = \min_{x \in K} \|x\|$. Für $x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ folgt

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \cdot \|x\|_\infty \geq \alpha \|x\|_\infty.$$

Damit erhalten wir $\alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^p$. □

Analog zu Satz 3.6.5 ist das folgende Resultat (und sein Beweis).

Satz 6.5.7 *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, M kompakt und $f : M \to N$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

6.6 Zusammenhang

Definition 6.6.1 Ein metrischer Raum (M, d) heißt *unzusammenhängend*, falls nichtleere, offene Teilmengen U, V von M existieren, so dass $M = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$ gilt. Andernfalls heißt (M, d) *zusammenhängend*.

Bemerkungen. 1. Aus $U, V \neq \emptyset$ und $U \cap V = \emptyset$ folgt $U, V \neq M$.

2. Statt zu fordern, dass U, V beide offen sind, kann man auch fordern, dass U, V beide abgeschlossen sind. Denn sind U, V wie in Definition 6.6.1, so sind $A := M \backslash U$ und $B := M \backslash V$ abgeschlossen, nichtleer und es gilt $A \cup B = M$ und $A \cap B = \emptyset$.

3. Eine Teilmenge N von M heißt (un)zusammenhängend, falls dies für den metrischen Raum $(N, d|(N \times N))$ gilt. Es gilt dann, dass N genau dann unzusammenhängend ist, wenn (in M) offene Mengen $U', V' \subset M$ existieren, so dass $U' \cap N \neq \emptyset$, $V' \cap N \neq \emptyset$, $N \subset U' \cup V'$ und $U' \cap V' \cap N = \emptyset$; vgl. Satz 6.3.1.

Satz 6.6.1 *Eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist oder wenn sie aus einem Punkt besteht.*

Beweis. Einpunktige Mengen sind offensichtlich zusammenhängend. Sei $I \subset \mathbb{R}$ und I enthalte mindestens zwei Punkte.

"$\Rightarrow$". Sei I zusammenhängend. Seien $\alpha, \beta \in I$ und $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Dann folgt $\gamma \in I$, da sonst mit $U' := (-\infty, \gamma)$ und $V' = (\gamma, \infty)$ gilt, dass $I \subset U' \cup V'$, $U' \cap I \neq \emptyset$, $V' \cap I \neq \emptyset$ und $U' \cap V' = \emptyset$. Mit $a := \inf I$ und $b := \sup I$ folgt hieraus, dass I eines der Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ oder (a, b) ist.

"$\Leftarrow$". Sei I Intervall. Wir nehmen an, dass I nicht zusammenhängend ist, etwa $I = A \cup B$ mit nichtleeren, disjunkten, in I abgeschlossenen Mengen $A, B \subset I$. Sei $a \in A$, $b \in B$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a < b$. Wegen $a, b \in I$ folgt dann $[a, b] \subset I$. Sei $c := \sup(A \cap [a, b])$. Dann gilt $c \in A$ (und damit insbesondere $c < b$), da A abgeschlossen. Andererseits ist $(c, b] \subset B$ und wegen der Abgeschlossenheit von B also auch $c \in B$. Insgesamt folgt $c \in A \cap B$, ein Widerspruch. □

Satz 6.6.2 *Seien (M, d_M) und (N, d_N) metrische Räume, M zusammenhängend und $f : M \to N$ stetig. Dann ist $f(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(M) = N$. Sei N unzusammenhängend, etwa $N = U \cup V$ mit nichtleeren, disjunkten, offenen Teilmengen U, V von N. Mit $\widetilde{U} := f^{-1}(U)$ und $\widetilde{V} := f^{-1}(V)$ gilt dann $M \subset \widetilde{U} \cup \widetilde{V}$, und es sind $\widetilde{U}$ und $\widetilde{V}$ offen (vgl. Satz 6.4.3, (ii)), nichtleer und disjunkt. Damit ist M unzusammenhängend. $\square$

Definition 6.6.2 Sei (M, d) metrischer Raum.

(i) Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $\gamma : [a, b] \to M$ stetig. Dann heißt γ *Weg* von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Die Punkte $\gamma(a)$ bzw. $\gamma(b)$ heißen *Anfangs*- bzw. *Endpunkt* des Weges γ.

(ii) (M, d) heißt *wegzusammenhängend*, wenn für alle $x, y \in M$ ein Weg von x nach y existiert.

Satz 6.6.3 *Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei (M, d) wegzusammenhängender metrischer Raum. Wir nehmen an, dass M unzusammenhängend ist, etwa $M = U \cup V$ mit nichtleeren, disjunkten, offenen Teilmengen U, V von M. Sei $u \in U$, $v \in V$. Dann existiert ein Weg $\gamma : [a, b] \to M$ von u nach v. Es ist dann $\gamma([a, b])$ unzusammenhängend, nach Satz 6.6.2 also $[a, b]$ unzusammenhängend, im Widerspruch zu Satz 6.6.1. $\square$

Die Umkehrung von Satz 6.6.3 gilt nicht, wie das folgende *Beispiel* zeigt. Sei $M := \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, 1]\} \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ und sei d die euklidische Metrik, eingeschränkt auf M. Dann ist (M, d) zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Die Menge M ist in Abbildung 26 dargestellt.

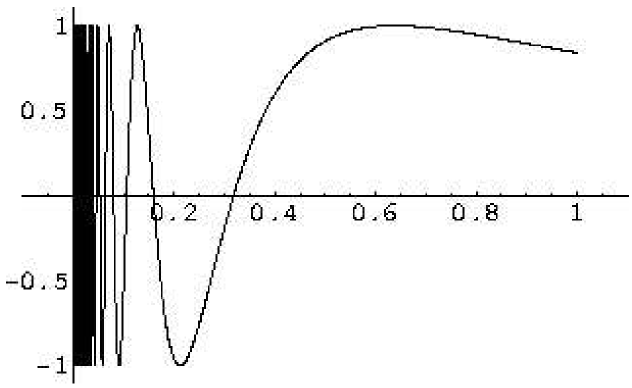

Abbildung 26: Eine zusammenhängende Menge.

Definition 6.6.3 Sei V Vektorraum (über $\mathbb{K}$).

(i) Für $x, y \in V$ heißt $[x, y] := \{(1-t)x + ty : t \in [0, 1]\}$ *Strecke* (von x nach y).

(ii) Für $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ heißt $[x_1, x_2, \ldots, x_n] := [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$ *Streckenzug* (von x_1 nach x_n).

In einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ ist für $x, y \in V$ die durch $t \mapsto (1-t)x + ty$ gegebene Funktion $\gamma : [0,1] \to V$ stetig, also ein Weg von x nach y. Damit ist die Strecke $[x, y] = \gamma([0,1])$ das Bild eines Weges. Auch Streckenzüge sind Bilder von Wegen.

Satz 6.6.4 *Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum und $M \subset V$ offen und zusammenhängend. Dann existiert für alle $x, y \in M$ ein in M verlaufender Streckenzug von x nach y, d. h., es existieren $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ mit $x_1 = x$, $x_n = y$ und $[x_1, x_2, \ldots, x_n] \subset M$. Insbesondere ist M wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $x \in M$. Wir betrachten die Menge U aller $y \in M$, für die ein in M verlaufender Streckenzug von x nach y existiert. Zu zeigen ist, dass $U = M$ gilt.

Wir zeigen zunächst, dass U offen ist. Sei dazu $y \in U$ und $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ein in M verlaufender Streckenzug von x nach y. Da M offen und $y \in U \subset M$, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(y, \varepsilon) \subset M$. Für $z \in U(y, \varepsilon)$ ist dann $[x_1, x_2, \ldots, x_n, z]$ ein in M verlaufender Streckenzug von x nach z. Es folgt $U(y, \varepsilon) \subset U$ und damit ist U offen.

Ein analoges Argument zeigt, dass auch $V := M \backslash U$ offen ist. Wegen $U \neq \emptyset$, $U \cup V = M$ und $U \cap V = \emptyset$ folgt nun aus dem Zusammenhang von M, dass $V = \emptyset$, also $U = M$. $\square$