Analysis II

Walter Bergweiler

Sommersemester 2007
Fassung vom 2. Mai 2007

Diese Vorlesung ist eine Fortsetzung der Vorlesung Analysis I aus dem Wintersemester 2006/2007. Die Nummerierung dieser Vorlesung wird hier fortgesetzt; Verweise wie "nach Satz $x.y.z$" mit $x \leq 4$ beziehen sich darauf.

Inhaltsverzeichnis

5 Integration

5.1 Das Riemann-Integral

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Produkt der Seitenlängen. Die Idee beim Riemann-Integral ist die Approximation allgemeinerer Flächen durch Rechtecke und damit die Definition des Flächeninhaltes durch einen Grenzübergang.

Definition 5.1.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $I := [a, b]$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Dann heißt $Z := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine *Zerlegung* von I. Für $k \in \{1, \ldots, n\}$ heißt $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ das k-te Teilintervall der Zerlegung und $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ die *Länge* von I_k. Weiter heißt $|Z| := \max_k |I_k|$ die *Feinheit* der Zerlegung Z.

Sei $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ (also $\xi_k \in I_k$ für alle k). Dann heißen die ξ_k (oder auch das n-tupel ξ) *Stützstellen* zur Zerlegung Z.

Sei zusätzlich noch $f : I \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$S(Z, \xi) := S(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|$$

Riemannsche Summe von f bzgl. Z und ξ.

Eine Zerlegung eines kompakten Intervalls ist nach Definition also nichts anderes als eine endliche Teilmenge des Intervalls, die die Endpunkte enthält. Schreiben wir im folgenden aber eine Zerlegung Z von $[a, b]$ in der Form $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, so werden wir immer $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ annehmen.

Für die Zerlegung $Z = \{1\ ,\ 2\ ,\ 2{,}5\ ,\ 3{,}2\ ,\ 4\}$ des Intervalls $[1, 4]$, geeignete Stützstellen ξ und die durch $x \mapsto 2+\sin x$ gegebene Funktion f sind in Abbildung 20 die Rechtecke dargestellt, deren Flächensumme $S(f, Z, \xi)$ ist.

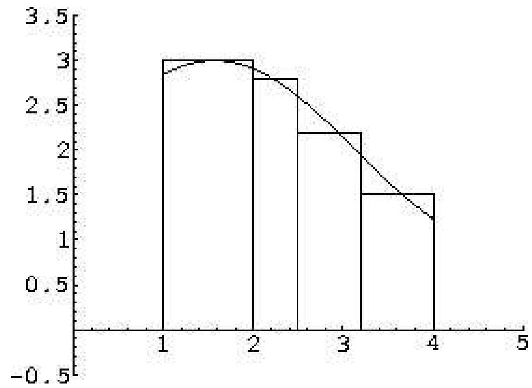


Abbildung 20: Eine Riemannsche Summe.

Die Idee ist nun, einen Grenzübergang $|Z| \to 0$ durchzuführen.

Definition 5.1.2 Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *Riemann-integrierbar* (kurz auch: *integrierbar*) falls es ein $S \in \mathbb{C}$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Ist Z eine Zerlegung von I mit $|Z| < \delta$ und sind ξ zugehörige Stützstellen, so gilt $|S(f, Z, \xi) - S| < \varepsilon$.

Existiert so ein S, so ist es eindeutig und heißt *Riemann-Integral* (kurz auch: *Integral*) von f über I. Es wird mit $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f$ oder $\int_I f$ bezeichnet.

In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung wie folgt:

$$\exists S \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ von } I\ \forall \text{ Stützstellen } \xi \text{ zu } Z :$$
$$|Z| < \delta \Rightarrow |S(f, Z, \xi) - S| < \varepsilon.$$

Die Eindeutigkeit von S ist klar; man vgl. den Beweis, dass eine konvergente Zahlenfolge nur einen Grenzwert hat.

Man kann $\int_a^b f$ nicht direkt als Grenzwert von $S(Z, \xi)$ für $|Z| \to 0$ definieren, da ja Z und ξ durch $|Z|$ nicht eindeutig festgelegt sind. Dennoch übertragen sich viele Resultate über Grenzwerte ohne weiteres. Beispielsweise ist f genau dann integrierbar mit $S = \int_a^b f$ ist, wenn für jede Folge (Z_n) von Zerlegungen mit $|Z_n| \to 0$ und jede zugehörige Stützstellenfolge (ξ_n) gilt, dass $S(Z_n, \xi_n) \to S$.

Auch das Cauchykriterium gilt analog:

Satz 5.1.1 (Cauchykriterium für Integrierbarkeit) *Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert: Sind Z_1 und Z_2 Zerlegunge von I mit $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$ und sind ξ_1 und ξ_2 Stützstellen zu Z_1 bzw. Z_2, so gilt $|S(Z_1, \xi_1) - S(Z_2, \xi_2)| < \varepsilon$.*

In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall \text{ Zerlegungen } Z_1, Z_2 \text{ von } I\ \forall \text{ Stützstellen } \xi_1, \xi_2 \text{ zu } Z_1, Z_2 :$$
$$|Z_1| < \delta \wedge |Z_2| < \delta \Rightarrow |S(Z_1, \xi_1) - S(Z_2, \xi_2)| < \varepsilon.$$

Der Beweis ist analog zum Cauchkriterium für Funktionengrenzwerte (Satz 3.3.4).

Satz 5.1.2 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Ist f stetig, so ist f integrierbar.*

Zum Beweis benutzen wir folgenden

Hilfssatz 5.1.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Seien $\varepsilon, \delta > 0$ und es gelte $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$. Seien weiter Z, Z' Zerlegungen mit Stützstellen ξ, ξ'. Ist dann $Z \subset Z'$ und $|Z| < \delta$, so gilt $|S(Z, \xi) - S(Z', \xi')| < \varepsilon|I|$.*

Beweis. Seien $I_1, I_2, \ldots, I_m$ die Teilintervalle von Z und $I'_1, I'_2, \ldots, I'_n$ die Teilintervalle von Z'. Dann gilt $m \le n$ und es gilt $I_1 = I'_1 \cup I'_2 \cup \cdots \cup I'_{\ell_1}$, $I_2 = I'_{\ell_1+1} \cup \cdots \cup I'_{\ell_2}$, $\ldots$, $I_m = I'_{\ell_{m-1}+1} \cup \cdots \cup I'_{\ell_m}$ mit $0 < \ell_1 < \cdots < \ell_m := n$. Es folgt mit $\ell_0 := 0$, dass

$$\begin{aligned}
|S(Z, \xi) - S(Z', \xi')| &= \left| \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)|I_k| - \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)|I'_k| \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} |I'_j| - \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} f(\xi'_j)|I'_j| \right| \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=\ell_{k-1}+1}^{\ell_k} \underbrace{|f(\xi_k) - f(\xi'_j)|}_{<\varepsilon} |I'_j| \\
&< \varepsilon|I|.
\end{aligned}$$

Beweis von Satz 5.1.2. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2|I|}$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$.

Es seien jetzt Z_1, Z_2 Zerlegungen von I mit Stützstellen ξ_1, ξ_2. Es gelte $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$. Für $Z := Z_1 \cup Z_2$ und beliebige Stützstellen ξ zu Z folgt mit Hilfssatz 5.1.1 dann

$$|S(Z_1,\xi_1)-S(Z_2,\xi_2)| \leq |S(Z_1,\xi_1)-S(Z,\xi)|+|S(Z,\xi)-S(Z_2,\xi_2)| < \varepsilon'|I|+\varepsilon'|I| = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt mit dem Cauchykriterium (Satz 5.1.1). □

Beispiel. Sei $I = [0, 1]$ und $f := id_I$, also $f(x) = x$. Dann ist f stetig. Es sei $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ und $\xi_n = (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1)$. Dann gilt $|Z_n| = \frac{1}{n} \to 0$ und

$$S(Z_n, \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{2},$$

also $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

Die Umkehrung von Satz 5.1.2 gilt nicht, d. h., integrierbare Funktionen müssen nicht stetig sein. Zum Beispiel zeigt man leicht, dass Funktionen mit endlich (oder sogar abzählbar unendlich) vielen Unstetigkeitsstellen integrierbar sind. Es gilt aber der folgende Satz.

Satz 5.1.3 *Integrierbare Funktionen sind beschränkt.*

Wir skizzieren nur die *Beweisidee*: Sind I, f wie vorher, und ist f unbeschränkt, so existiert eine Folge (x_k) in I mit $|f(x_k)| \to \infty$. Sei nun Z eine Zerlegung mit Stützstellen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Sei I_{j_k} das Teilintervall, welches x_k enthält. (Falls $x_k \in Z$ ist, aber x_k kein Randpunkt von I ist, existieren zwei Teilintervalle mit dieser Eigenschaft. In diesem Falle sei I_{j_k} irgendeines dieser beiden.) Wir betrachten die Stützstellen $\xi^{(k)}$, die wir dadurch erhalten, dass wir ξ_{j_k} durch x_k ersetzen, also $\xi^{(k)} = (\xi_1, \ldots, \xi_{j_k-1}, x_k, \xi_{j_k+1}, \ldots, \xi_n)$. Dann folgt $|S(Z, \xi^{(k)})| \to \infty$. □

Satz 5.1.4 *Sei I kompaktes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ integrierbar. Sei $c \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $f+g$, $c \cdot f$ und $\overline{f}$ integrierbar und es gilt $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$, $\int_I c \cdot f = c \cdot \int_I f$ und $\int_I \overline{f} = \overline{\int_I f}$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus

$$S(f + g, Z, \xi) = S(f, Z, \xi) + S(g, Z, \xi).$$

Die anderen erhält man analog. □

Satz 5.1.5 *Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn* $\mathrm{Re} f$ *und* $\mathrm{Im} f$ *integrierbar sind. In diesem Fall gilt $\int_I f = \int_I \mathrm{Re} f + i \int_I \mathrm{Im} f$.*

Der *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 5.1.4.

Man kann sich also auf die Integration reellwertiger Funktionen beschränken. Für beschränktes $f : I \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung Z von I nennt man

$$\overline{S}(Z) := \overline{S}(f, Z) := \sup_{\xi} S(Z, \xi)$$

bzw.

$$\underline{S}(Z) := \underline{S}(f, Z) := \inf_{\xi} S(Z, \xi)$$

Riemannsche Ober- bzw. Untersumme von f. Dabei sind Supremum bzw. Infimum über alle Stützstellen ξ zur Zerlegung Z zu nehmen. Für $Z' \subset Z$ gilt dann

$$\underline{S}(Z') \leq \underline{S}(Z) \leq \overline{S}(Z) \leq \overline{S}(Z').$$

Man nennt

$$\overline{\int_I} f := \inf_Z \overline{S}(Z)$$

bzw.

$$\underline{\int_I} f := \sup_Z \underline{S}(Z)$$

oberes bzw. unteres Riemann-Integral von f. Hier sind Supremum bzw. Infimum über alle Zerlegungen Z von I zu nehmen. Man beachte, dass oberes und unteres Riemann-Integral (für beschränktes f) immer existieren.

Satz 5.1.6 (Riemannsches Integrabilitätskriterium) *Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist integrierbar,*

(ii) $\underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$,

(iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon$.*

Im Falle der Integrierbarkeit gilt $\int_I f = \underline{\int_I} f = \overline{\int_I} f$.

Beweis. Übung.

Satz 5.1.7 *Seien I, J kompakte Intervalle, $f : I \to J$ integrierbar und $\phi : J \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\phi \circ f$ integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da ϕ gleichmäßig stetig nach Satz 3.6.5 existiert $\delta > 0$ mit $|\phi(x) - \phi(y)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2|I|}$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$. Sei $K := \max \phi(J) - \min \phi(J)$. Man kann annehmen, dass $\delta < \varepsilon/(2K + 1)$.

Nun existiert eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ von I mit $\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z) < \delta^2$. Wir definieren nun $M_k := \sup f(I_k)$, $m_k := \inf f(I_k)$, $M_k^* := \sup \phi(f(I_k))$, $m_k^* := \inf \phi(f(I_k))$, $A = \{k : M_k - m_k < \delta\}$ und $B = \{k : M_k - m_k \geq \delta\}$. Für $k \in A$ ist dann $M_k^* - m_k^* < \varepsilon'$. Außerdem gilt für alle k, insbesondere also für $k \in B$, auch $M_k^* - m_k^* \leq K$. Desweiteren ist

$$\sum_{k \in B} |I_k| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k \in B} (M_k - m_k)|I_k| \leq \frac{1}{\delta} \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)|I_k| = \frac{1}{\delta} \left(\overline{S}(f, Z) - \underline{S}(f, Z)\right) < \delta.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \overline{S}(\phi \circ f, Z) - \underline{S}(\phi \circ f, Z) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k^* - m_k^*)|I_k| \\ &\leq \sum_{k \in A} \varepsilon' |I_k| + \sum_{k \in B} K|I_k| \\ &< \varepsilon' |I| + K\delta \\ &< \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Satz 5.1.8 *Sei I kompaktes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann sind auch $|f|$ und $f \cdot g$ integrierbar. Außerdem gilt*

$$\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \leq |I| \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Beweis. Für reellwertiges f folgt die Integrierbarkeit von $|f|$ direkt aus Satz 5.1.7 (mit $\phi(x) = |x|$). Mit $\phi(x) = x^2$ folgt aus diesem Hilfssatz auch die Integrierbarkeit von f^2. Wegen $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ erhält man mit Satz 5.1.4 dann auch die Integrierbarkeit von $f \cdot g$, falls f und g beide reellwertig sind.

Für komplexwertiges f, g erhält man die Integrierbarkeit von $|f|$ und $f \cdot g$ jetzt mit Satz 5.1.5 (und wiederum Satz 5.1.7).

Die Abschätzung von $\left|\int_I f\right|$ folgt wegen

$$|S(f, Z, \xi)| \leq S(|f|, Z, \xi) \leq |I| \sup_{x \in I} |f(x)|$$

für alle Zerlegungen Z von I mit Stützstellen ξ. $\square$

Durch Abschätzung der Riemannschen Summen zeigt man auch leicht folgenden Satz.

Satz 5.1.9 *Sei I kompaktes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so gilt $\int_I f \leq \int_I g$.*

Folgerung 5.1.1 *Ist I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist*

$$|I| \inf f(I) \leq \int_I f \leq |I| \sup f(I).$$

Die linke bzw. rechte Seite in obiger Ungleichung sind auch die Riemannsche Unter- bzw. Obersumme zu der Zerlegung von I, die nur aus den beiden Randpunkten besteht.

Satz 5.1.10 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann existiert $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf f(I) \leq \mu \leq \sup f(I)$ und $\int_I f = \mu |I|$. Ist f stetig, so existiert $\xi \in \operatorname{int}(I)$ mit $\mu = f(\xi)$.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus obiger Folgerung, die zweite aus dem Zwischenwertsatz. $\square$

Analog beweist man das folgende Ergebnis.

Satz 5.1.11 (Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei I kompaktes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann existiert $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf f(I) \leq \mu \leq \sup f(I)$ und $\int_I fg = \mu \int g$. Ist f stetig, so existiert $\xi \in \operatorname{int}(I)$ mit $\mu = f(\xi)$.*

Satz 5.1.12 *Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ monoton. Dann ist f integrierbar.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f monoton steigend und nicht konstant. Dann ist $f(b) > f(a)$. Sei $\varepsilon > 0$ und Z Zerlegung von I mit $|Z| < \delta := \varepsilon/(f(b) - f(a))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,Z) - \underline{S}(f,Z) &= \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))|I_k| \\ &< \delta\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \delta(f(b) - f(a)) \\ &= \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Satz 5.1.13 (i) *Sind I, J kompakte Intervalle mit $J \subset I$ und ist $f : I \to \mathbb{C}$ integrierbar (über I), so ist auch $f|J$ integrierbar (über J).*

(ii) *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$ und sei $f : [a, c] \to \mathbb{C}$. Sind dann $f|[a, b]$ und $f|[b, c]$ integrierbar, so ist auch f integrierbar und es gilt*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Beweis. Übung.

Wegen (ii) setzt man für $a < b$ und integrierbares $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ auch $\int_b^a f := -\int_a^b f$. Außerdem setzt man $\int_a^a f = 0$ für $f : \{a\} \to \mathbb{C}$. Mit diesen Setzungen gilt die Formel in (ii) für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, wenn die auftretenden Integrale definiert sind.

5.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition 5.2.1 Sei I Intervall, $F : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $f : I \to \mathbb{C}$. Dann heißt F *Stammfunktion* von f, falls $F' = f$.

Seien F, G Stammfunktionen von f, g und sei $c \in \mathbb{C}$. Unmittelbar sieht man ein, dass dann $F + G$ Stammfunktion von $f + g$ und $c \cdot F$ Stammfunktion von $c \cdot f$ ist.

Mit F ist auch $F+c$ Stammfunktion von f. Umgekehrt gilt nach Satz 4.3.1, dass wenn F_1 und F_2 Stammfunktionen von f sind, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $F_1 = F_2 + c$.

Beispiel. Sei $I := (-1, 1)$, $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Eine Stammfunktion von f ist $\arccos|I$, eine andere ist $-\arcsin|I$. Man beachte, dass $\arccos = \frac{\pi}{2} - \arcsin$.

Satz 5.2.1 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar.*

(i) *Besitzt f eine Stammfunktion F, so gilt $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

(ii) *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f$. Ist f stetig in $y \in [a, b]$, so ist F differenzierbar in y mit $F'(y) = f(y)$. Ist f stetig in $[a, b]$, so ist F Stammfunktion von f.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheitsei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

zu (i): Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ Zerlegung von $[a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz (der Differentialrechung) existiert zu $k \in \{1, \ldots, n\}$ dann $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Mit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ erhält man

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= S(f, Z, \xi). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

zu (ii): Seien $x, y \in [a, b]$, $x \neq y$. Dann gilt nach Satz 5.1.13

$$F(x) - F(y) = \int_a^x f - \int_a^y f = \int_x^y f$$

und damit nach Satz 5.1.9

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(y)}{x - y} - f(y) \right| &= \left| \frac{1}{x - y} \int_y^x f(t)dt - f(y) \frac{1}{x - y} \int_y^x 1 \, dt \right| \\ &= \frac{1}{|x - y|} \left| \int_y^x f(t) - f(y) \, dt \right| \\ &\leq \sup_{t \in [y,x]} |f(t) - f(y)|. \end{aligned}$$

Ist f stetig in y, so strebt die rechte Seite für $x \to y$ gegen 0 und es folgt

$$\lim_{x \to y} \frac{F(x) - F(y)}{x - y} = f(y). \quad \square$$

Die im Hauptsatz auftretende Differenz $F(b) - F(a)$ schreiben wir im folgenden oft in der Form

$$F\Big|_a^b, \quad F(x)\Big|_a^b \quad \text{oder} \quad F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Beispiel. Es ist $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ und damit

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Man beachte, dass aus der Integrierbarkeit nicht die Existenz einer Stammfunktion folgt, und aus der Existenz einer Stammfunktion auch nicht die Integrierbarkeit.

Beispiele. 1. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{falls } 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Dann ist f integrierbar und $\int_{-1}^1 f = \int_{-1}^0 f + \int_0^1 f = -1 + 1 = 0$. Wäre F Stammfunktion, so wäre nach dem Hauptsatz $F(1) - F(-1) = \int_{-1}^1 f = 0$, nach dem Satz von Rolle würde also $\xi \in (-1,1)$ mit $f(\xi) = F'(\xi) = 0$ existieren, ein Widerspruch. Also hat f keine Stammfunktion.

2. Sei $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Dann ist F differenzierbar (vgl. das Beispiel in §4.1) mit

$$F'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Setzt man $f := F'$, so ist also F Stammfunktion von f. Es ist aber f nicht integrierbar, da $f\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\right) = 2\sqrt{2\pi k} \to \infty$ für $k \to \infty$, $k \in \mathbb{N}$, und damit f unbeschränkt ist.

Der Hauptsatz reduziert also die Berechnung von Integralen auf das Auffinden von Stammfunktionen. Statt "F ist Stammfunktion von f" schreibt man auch

$$\int f = F \quad \text{oder} \quad \int f(x)dx = F(x).$$

Da für konstantes C mit F auch $F+C$ Stammfunktion ist, schreibt man manchmal auch

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Man nennt Stammfunktionen auch *unbestimmte Integrale.*

Obige Schreibweisen sind mit Vorsicht zu benutzen! So gilt etwa

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \quad \text{und} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arccot} x,$$

aber es gilt $\arctan x \neq -\operatorname{arccot} x$. (Es ist $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$.)

Falls nichts anderes angegeben ist, gelten die in den folgenden *Beispielen* angegebenen Stammfunktionen in jedem Intervall, in denen der Integrand definiert ist.

- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq -1$,
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$,
- $\int e^x \, dx = e^x$,
- $\int \cos x \, dx = \sin x$,

- $\int \sin x \, dx = -\cos x$,
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$,
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$,
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$,
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$,
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x$,
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$,
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$ für $x \in (1, \infty)$.

Die in den letzten beiden Beispielen angegebenen Stammfunktionen sind Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen sinh und cosh, d. h., die durch $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right)$, und $\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty)$, $x \to \ln \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)$, definierten Funktionen erfüllen $\operatorname{arsinh}(\sinh x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$ bzw. $\operatorname{arcosh}(\cosh x) = x$ für $x \in [0, \infty)$. Sie heißen *Area sinus (bzw. cosinus) hyperbolicus*; vgl. § 3.4. Im Intervall $(-\infty, -1)$ gilt

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{arcosh}(-x)$.

5.3 Integrationstechniken

Kennt man die Ableitungen zweier Funktionen f und g, so kann man die von $f \cdot g$, f/g, $f \circ g$, usw. daraus berechnen. Entsprechendes gilt *nicht* für die Berechnung von Stammfunktionen. Dennoch gibt es einige nützliche Regeln.

Satz 5.3.1 (Partielle Integration) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Beweis. Sei $F : [a, b] \to \mathbb{C}$, $F(x) = fg\Big|_a^x - \int_a^x f'g$. Nach Produktregel und Hauptsatz, Teil (ii), folgt dann $F' = f'g + fg' - f'g = fg'$. Die Behauptung folgt jetzt mit dem Hauptsatz, Teil (i). $\square$

Man schreibt die Regel der partiellen Integration auch als

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Beispiele. 1. Für $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_0^a xe^x dx = xe^x\Big|_0^a - \int_0^a e^x dx = ae^a - e^x\Big|_0^a = ae^a - e^a + 1.$$

Es gilt also

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x.$$

(Die additive Konstante 1 ist hier weggelassen.)

2. Für $x > 0$ ist

$$\int_1^x \ln t\, dt = \int_1^x \underbrace{1}_{g'} \cdot \underbrace{\ln t}_{f}\, dt = t \cdot \ln t\Big|_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t}\, dt = x \ln x - x + 1.$$

Wiederum schreibt man auch $\int \ln x = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$.

Neben der partiellen Integration ist die wichtigste Integratiosmethode die Substitution.

Satz 5.3.2 (Substitutionsregel) *Sei $g : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz hat f eine Stammfunktion F. Nach Kettenregel ist $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$ und damit ist $F \circ g$ Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$. Mit dem Hauptsatz folgt

$$\int_a^b (f \circ g) \cdot g' = F \circ g\Big|_a^b = F\Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f. \quad \square$$

Die Substitutionsregel kann man sich merken, indem man $x = g(t)$ setzt. Dann ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$.

Beispiele. 1. Es ist

$$\int_0^2 \frac{t\, dt}{1+t^4} \overset{x=t^2}{=} \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan 4.$$

2. Es ist

$$\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln t}}{t} dt \overset{x=\ln t}{=} \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx \overset{y=1+x}{=} \int_1^2 \sqrt{y}\, dy = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right).$$

3. Wir betrachten für $x \in [-1,1]$ das Integral

$$\int_0^x \sqrt{1-y^2}\, dy.$$

Mit $y = \sin t$, $t = \arcsin y$, wobei $y \in [-1,1]$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ist dann $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$. Die Subsitutionsregel (mit $g(t) = \sin t$, $g'(t) = \cos t$) liefert also

$$\int_0^s \cos^2 t\, dt = \int_0^{\sin s} \sqrt{1-y^2}\, dy$$

für $s \in [-1,1]$. Es folgt also

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{1-y^2}dy &= \int_0^{\arcsin x} \cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\arcsin x} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\arcsin x} \\
&= \frac{1}{2}\left(t+\sin t\cos t\right)\Big|_0^{\arcsin x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right).
\end{aligned}$$

Wir beschreiben jetzt die *Integration rationaler Funktionen*, d. h., Funktionen f der Form $f = \frac{P}{Q}$ mit teilerfremden Polynomen P, Q. Wir dürfen $\mathrm{grad}(P) < q := \mathrm{grad}(Q)$ annehmen. (Andernfalls führen wir zunächst eine Polynomdivision durch.) Nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.9.2) existieren $c \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ und $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ mit

$$Q(z) = c\prod_{j=1}^{k}(z-a_j)^{m_j}$$

für $z \in \mathbb{C}$. Es gilt dann $\sum_{j=1}^k m_j = q$. Wir dürfen $c = 1$ annehmen. Wir setzen nun die Koeffizienten von Q als reell voraus. Dann gilt $\overline{Q(z)} = Q(\overline{z})$ und damit ist mit a auch $\overline{a}$ Nullstelle von Q. Wir fassen in dem Produkt für Q nun konjugiert komplexe Nullstellen zusammen und erhalten wegen

$$(z-a)(z-\overline{a}) = z^2 - (a+\overline{a})z + a\overline{a} = z^2 - 2\,\mathrm{Re}\, a\cdot z + |a|^2$$

für Q dann eine Darstellung

$$Q(x) = \prod_{j=1}^{M}(x-a_j)^{m_j}\prod_{j=1}^{N}(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}$$

mit $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$, $c_j > b_j^2/4$, $m_j, n_j \in \mathbb{N}$ und $\sum_{j=1}^M m_j + 2\sum_{j=1}^N n_j = q$.

Der *Satz von der Partialbruchzerlegung* besagt nun, dass $A_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, M$, $j = 1, \ldots, m_i$, und $B_{i,j}, C_{i,j} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, n_i$, existieren, so dass

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} = \quad & \frac{A_{1,1}}{x-a_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-a_1)^{m_1}} \\
+ \quad & \frac{A_{2,1}}{x-a_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2,m_2}}{(x-a_2)^{m_2}} \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & \frac{A_{M,1}}{x-a_M} + \frac{A_{M,2}}{(x-a_M)^2} + \cdots + \frac{A_{M,m_M}}{(x-a_M)^{m_M}} \\
+ \quad & \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1,n_1}x+C_{1,n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} \\
+ \quad & \ldots \\
+ \quad & \frac{B_{N,1}x+C_{N,1}}{x^2+b_Nx+c_N} + \frac{B_{N,2}x+C_{N,2}}{(x^2+b_Nx+c_N)^2} + \cdots + \frac{B_{N,n_N}x+C_{N,n_N}}{(x^2+b_Nx+c_N)^{n_N}}.
\end{aligned}$$

Der *Beweis* lässt sich durch vollständige Induktion über q führen; hier nicht. Die Koeffizienten $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}$ kann man durch Multiplikation mit $Q(x)$ und Koeffizientenvergleich bestimmen.

Die in der Partialbruchzerlegung rechts stehenden Terme lassen sich nun integrieren. Es ist zunächst

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A \ln|x-a|$$

und

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}dx = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}$$

für $m \geq 2$. Wegen $x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$ lassen sich die Terme mit $(x^2 + bx + c)^n$ im Nenner durch eine Substitution auf die Form

$$\frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + \alpha^2)^n}$$

bringen. Nun ist

$$\int \frac{\beta x}{x^2 + \alpha^2}dx = \frac{\beta}{2} \ln\left(x^2 + \alpha^2\right)$$

und

$$\int \frac{\beta x}{(x^2 + \alpha^2)^n}dx = -\frac{\beta}{2} \frac{1}{(n-1)\left(x^2 + \alpha^2\right)^{n-1}}$$

für $n \geq 2$. Schließlich ist noch

$$\int \frac{dx}{x^2 + \alpha^2} = \frac{1}{\alpha} \arctan \frac{x}{\alpha}$$

und für $n \geq 2$ zeigt partielle Integration, dass

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^n} &= \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{\alpha^2 + x^2 - x^2}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^n}dx \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^2} \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\frac{x}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^n}}_{g'} dx \\
&= \frac{1}{\alpha^2} \int \frac{dx}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{\alpha^2} \left[x \left(-\frac{1}{2(n-1)\left(x^2 + \alpha^2\right)^{n-1}}\right)\right. \\
&\quad \left. + \int \frac{dx}{2(n-1)\left(x^2 + \alpha^2\right)^{n-1}}\right].
\end{aligned}$$

Damit können die Integrale

$$\int \frac{dx}{\left(x^2 + \alpha^2\right)^n}$$

rekursiv berechnet werden.

Beispiel. Man berechne

$$\int_1^2 \frac{x^4 + 1}{x^3 + x}dx.$$

Zunächst ist

$$f(x) := \frac{x^4+1}{x^3+x} = x - \frac{x^2-1}{x^3+x} = x - \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}.$$

Es existieren nun $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten A, B, C kann man natürlich mit dem Nenner durchmultiplizieren und anschließend Koeffizientenvergleich machen, was auf ein lineares Gleichungssystem für A, B, C führt. Einfacher ist, obige Gleichung mit x zu multiplizieren und anschließend $x = 0$ zu setzen. Dies führt sofort auf $A = -1$ und damit auf

$$\frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)} + \frac{1}{x} = \frac{x^2-1+x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)dx &= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right) dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \ln x - \ln(x^2+1)\Big|_1^2 \\
&= 2 + \ln 2 - \ln 5 - \frac{1}{2} + \ln 2 \\
&= \frac{3}{2} + 2\ln 2 - \ln 5 \quad \left(= \frac{3}{2} + \ln\frac{4}{5} = 1,276\ldots\right)
\end{aligned}$$

Viele Integrale lassen sich durch geeignete Substitutionen auf Integrale über rationale Funktionen zurückführen. Sei etwa R eine rationale Funktionen von zwei Veränderlichen, d. h., $R(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$, wobei P, Q bei festem x Polynome in y und bei festem y Polynome in x sind. Dann kann

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

durch die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, $x = 2\arctan t$, in ein Integral über eine rationale Funktion überführt werden. Die Rechnungen sind allerdings aufwendig.

Auch Integrale der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

lassen sich durch geeignete Substitutionen in Integrale über rationale Funktionen umformen.

5.4 Integralform des Taylorrestglieds

Mit partieller Integration lässt sich auch eine Formel für das Restglied der Taylorentwicklung gewinnen. Für eine n-mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und

$\xi, x \in I$ hatten wir (siehe §4.4)

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-\xi)^k$$

als Taylorpolynom (vom Grad n) bezeichnet. Für das *Restglied*

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

hatten wir für $(n+1)$-mal differenzierbares f die Darstellung

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$$

mit η zwischen ξ und x bewiesen (Satz 4.4.3). Man nennt dies auch die *Lagrangesche Form des Restglieds*. Wir leiten noch eine *Integralform des Restglieds* her.

Wir bezeichnen für ein Intervall I und $n \in \mathbb{N}$ die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{C}$ mit $C^n(I)$. Mit $C(I)$ bezeichnen wir die Menge der stetigen (englisch: continuous) Funktionen von I nach $\mathbb{C}$. Statt $C^n([a,b])$ bzw. $C([a,b])$ schreiben wir $C^n[a,b]$ bzw. $C[a,b]$.

Satz 5.4.1 *Für $f \in C^{n+1}(I)$ und $\xi, x \in I$ gilt*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(\xi) + \int_\xi^x f'(t)dt \\
&= f(\xi) + f'(t)(t-x)\Big|_{t=\xi}^{t=x} - \int_\xi^x f''(t)(t-x)dt \\
&= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \int_\xi^x f''(t)(x-t)dt \\
&= f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-\xi)^2 + \frac{1}{2}\int_\xi^x f'''(t)(x-t)^2 dt \\
&= \ldots,
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt durch vollständige Induktion. □

Ist f reellwertig, so erhält man mit dem erweiterten Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 5.1.11) aus der Integralform die Lagrangesche Form des Restglieds. (In Satz 4.4.3 wurde allerdings nicht die Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ vorausgesetzt.)

In §4.4 hatten wir das Beispiel $f(x) = \ln x$, $\xi = 1$, untersucht und gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ für $\frac{1}{2} \le x \le 2$ gilt. Mit Satz 5.4.1 können wir zeigen, dass dies sogar für $0 < x \leq 2$ gilt, denn für $0 < x < 1$ ist

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\int_x^1 (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&= \int_x^1 \frac{(t-x)^n}{t^{n+1}}dt \\
&= \int_x^1 \left(1-\frac{x}{t}\right)^n \frac{dt}{t} \\
&\leq (1-x)^n \int_x^1 \frac{dt}{t} \\
&= (1-x)^n \ln\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Für $f \in C^{n+1}(I)$ folgt aus Satz 5.4.1, und für reellwertiges f auch aus Satz 4.4.3, dass Konstanten $K, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit

$$|R_n(x)| \leq K|x-\xi|^{n+1}$$

für $|x-\xi| < \varepsilon$ existieren. Nun können T_n und R_n aber bereits für n-mal differenzierbares f definiert werden. Dann erhalten wir aber nur schlechtere Abschätzungen.

Satz 5.4.2 *Für $f \in C^n(I)$ und ξ, x in I gilt*

$$\lim_{x\to\xi} \frac{R_n(x)}{(x-\xi)^n} = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &= |f(x) - T_n(x)| \\
&= \left|f(x) - T_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n\right| \\
&= \left|\frac{1}{(n-1)!}\int_\xi^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt - \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n\right| \\
&= \left|\frac{1}{(n-1)!}\int_\xi^x \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(\xi)\right)(x-t)^{n-1}dt\right| \\
&\leq |x-\xi|^n \frac{1}{(n-1)!} \sup_t \left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(\xi)\right|,
\end{aligned}$$

wobei das Supremum über alle t zwischen ξ und x zu nehmen ist. Die Behauptung folgt. $\square$

Für reellwertiges f erhalten wir die Behauptung von Satz 5.4.2 auch direkt aus der Lagrangeschen Form des Restglieds:

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(\eta) - f^{(n)}(\xi)\right)(x-\xi)^n.$$

Die obigen Restgliedabschätzungen lassen sich gut mit den sogenannten *Landau-Symbolen* beschreiben. Ist $M \subset \mathbb{C}$ und ξ Häufungspunkt von M, wobei für $M \subset \mathbb{R}$

auch $\xi = \pm\infty$ zugelassen ist, und ist $\alpha : M \to \mathbb{C}$ und $\beta : M \to \mathbb{R}_+$, so schreibt man

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ für } x \to \xi, \quad \text{falls } \lim_{x\to\xi} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

und

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ für } x \to \xi, \quad \text{falls } \limsup_{x\to\xi} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} < \infty.$$

Dabei lässt man den Zusatz "für $x \to \xi$" oft weg, wenn dieser aus dem Zusammenhang hervorgeht. Offensichtlich gilt $\alpha(x) = O(\beta(x))$ für $x \to \xi$ genau dann, wenn Konstanten $K, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ existieren, so dass $|f(x)|/g(x) \le K$ für $|x - \xi| < \varepsilon$, bzw. falls $x > 1/\varepsilon$ oder $x < -1/\varepsilon$ falls $\xi = \pm\infty$.

Für $\xi, x \in I$ und $f : I \to \mathbb{C}$ (mit einem Intervall I) erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} f \in C^{n+1}(I) \quad &\Rightarrow \quad R_n(x) = O\left(|x-\xi|^{n+1}\right) \text{ für } x \to \xi, \\ f \in C^n(I) \quad &\Rightarrow \quad R_n(x) = o\left(|x-\xi|^{n}\right) \text{ für } x \to \xi. \end{aligned}$$

5.5 Folgen und Reihen integrierbarer Funktionen

In §3.7 bzw. §4.4 hatten wir untersucht, wann sich bei einer konvergenten Funktionenfolge aus der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit der Folgenglieder die der Grenzfunktion folgern läßt. Wir betrachten hier das entsprechende Problem für Integrierbarkeit.

Satz 5.5.1 *Sei I kompaktes Intervall und (f_n) eine Folge über I integrierbarer Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f über I integrierbar und es gilt $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$.*

Beweis. Ist bereits bekannt, daß f integrierbar ist, so folgt $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I f$ sehr leicht. Denn ist $\varepsilon > 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|I|}$ für alle $n \ge N$. Es folgt $\left|\int_I f_n - \int_I f\right| = \left|\int_I (f_n - f)\right| \le |I| \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ und damit die Behauptung.

Zu zeigen ist also lediglich die Integrierbarkeit von f. Diese zeigen wir mit dem Cauchykriterium (Satz 5.1.1). Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3|I|}$ für $n \ge N$. Für jede Zerlegung Z von I mit Stützstellen ξ folgt dann

$$|S(f_N, Z, \xi) - S(f, Z, \xi)| = |S(f_N - f, Z, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3|I|}|I|.$$

Da f_N integrierbar existiert $\delta > 0$, so daß für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 mit Stützstellen ξ_1, ξ_2 gilt: ist $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$, so ist

$$|S(f_N, Z_1, \xi_1) - S(f_N, Z_2, \xi_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für $|Z_1| < \delta$ und $|Z_2| < \delta$ folgt damit

$$\begin{aligned} & |S(f, Z_1, \xi_1) - S(f, Z_2, \xi_2)| \\ \le\ & |S(f, Z_1, \xi_1) - S(f_N, Z_1, \xi_1)| + |S(f_N, Z_1, \xi_1) - S(f_N, Z_2, \xi_2)| \\ & + |S(f_N, Z_2, \xi_2) - S(f, Z_2, \xi_2)| \\ <\ & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ =\ & \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Natürlich gilt auch wieder eine Analogon von Satz 5.5.1 für Reihen.

5.6 Fourierreihen

Sei $\omega \in \mathbb{R}_+$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt ω-periodisch, falls $f(x+\omega) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beispiele 2π-periodischer Funktionen sind der Cosinus und Sinus und allgemeiner für $k \in \mathbb{Z}$ auch die durch

$$x \mapsto \cos kx, \quad x \mapsto \sin kx, \quad x \mapsto e_k(x) := e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

definierten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Wir untersuchen die Frage, wann eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Darstellung der Form $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$, also $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, besitzt. (Dabei heißt für $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)$ konvergent, falls die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} u(k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} u(-k)$ beide konvergieren, und man setzt dann $\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) + \sum_{k=1}^{\infty} u(-k)$. Analog definiert man Begriffe wie absolute Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz, usw. für Reihen von $-\infty$ nach $-\infty$.)

Man nennt für $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{C}$, $-n \le k \le n$, eine Funktion der Form

$$x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

ein *trigonometrisches Polynom*. Wegen $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ gilt

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left((c_k + c_{-k}) \cos kx + i\,(c_k - c_{-k}) \sin kx \right),$$

mit $a_k := c_k + c_{-k}$ und $b_k := i\,(c_k - c_{-k})$ also

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Man erkennt leicht, dass a_k und b_k genau dann reell sind, wenn $c_{-k} = \overline{c_k}$ gilt.

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ gleichmäßig, ist durch $x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ nach Satz 3.7.2 (bzw. dem Analogon dieses Satzes für Reihen) eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben. Mit Satz 5.5.1 (bzw. dem Analogon dieses Satzes für Reihen) folgt für $j \in \mathbb{Z}$, dass

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \right) e^{-ijx} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-j)x} \right) dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-j)x} dx. \end{aligned}$$

Leicht rechnet man nach, dass für $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = 0, \\ 0 & \text{falls } m \neq 0, \end{cases}$$

gilt. Es folgt $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ijx}dx = c_j 2\pi$, also

$$c_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ijx}dx.$$

Dies motiviert folgende Definition.

Definition 5.6.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar über $[-\pi, \pi]$ und 2π-periodisch. Für $k \in \mathbb{Z}$ heißt dann

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

der k-te *Fourierkoeffizient* von f. Für $n \in \mathbb{N}$ heißt

$$F_n(x) := F_n(x, f) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

das n-te *Fourierpolynom* von f und

$$F(x) := F(x, f) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

heißt *Fourierreihe* von f.

Die Überlegungen vor der Definition zeigen, dass wenn eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ hat, dann gilt $c_k = \widehat{f}(k)$. Wenn die Fourierreihe F einer 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig konvergiert, gilt also $\widehat{f}(k) = \widehat{F}(k)$. Außerdem ist F stetig. Man kann zeigen, dass wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige, 2π-periodische Funktionen mit $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind, so gilt $f = g$. Wir verzichten auf den Beweis, notieren aber, dass man hieraus das folgende Ergebnis erhält.

Satz 5.6.1 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch. Die Fourierreihe von f konvergiere gleichmäßig. Dann gilt $f(x) = F(x, f)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Als Anwendung erhalten wir das folgende Resultat.

Satz 5.6.2 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zweimal stetig differenzierbar und 2π-periodisch. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig und es gilt $f(x) = F(x, f)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Zum Beweis benutzen wir folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 5.6.1 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige, 2π-periodische Funktion, die auf $(-\pi, \pi)$ differenzierbar ist. Weiter sei f' integrierbar über $[-\pi, \pi]$. Dann gilt $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$.*

Beweis. Mit partieller Integration folgt

$$2\pi\widehat{f'}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx = f(x)e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-ik)e^{-ikx}dx = 2\pi ik\widehat{f}(k)$$

und daraus die Behauptung. $\square$

Beweis von Satz 5.6.2. Mit $M := \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f''(x)|$ folgt nach Hilfsatz 5.6.1

$$\left|\widehat{f}(k)\right| = \frac{1}{k^2}\left|\widehat{f''}(k)\right| = \frac{1}{2\pi k^2}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)e^{-ikx}dx\right| \leq \frac{M}{k^2}$$

für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe und damit die Behauptung wegen Satz 5.6.1. $\square$

In vielen für die Anwendung interessanten Fällen konvergiert die Fourierreihe nicht gleichmäßig, sondern nur punktweise. Andererseits gibt es Beispiele stetiger Funktionen, deren Fourierreihe in gewissen Punkten nicht konvergiert.

Ohne Beweis geben wir folgenden Satz an. Dabei heißt eine auf einem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion f stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Zerlegung $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ gibt, so dass für $1 \leq k \leq n$ eine stetig differenzierbare Funktion $f_k : [x_{k-1}, x_k] \to \mathbb{C}$ mit $f_k(x) = f(x)$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$ existiert.

Satz 5.6.3 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die in $[-\pi, \pi]$ stückweise stetig differenzierbar ist. Dann konvergiert die Fourierreihe $F(x, f)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt*

$$F(x, f) = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x+} f(y) + \lim_{y\to x-} f(y)\right)$$

für alle $x \in R$.

Es folgt unter den Voraussetzungen des Satzes, dass $F(x, f) = f(x)$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$, in denen f stetig ist.

Bevor wir Beispiele betrachten, notieren wir, dass mit

$$a_k := a_k(f) := \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

und

$$b_k := b_k(f) := i\left(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

das n-te Fourierpolynom die Form

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

hat. Schließlich heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *gerade* falls $f(-x) = f(x)$ und *ungerade* falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Hilfssatz 5.6.2 *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbar über $[-\pi, \pi]$ und 2π-periodisch. Ist f gerade, so gilt $b_k(f) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$ und*

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$$

für $k \in \mathbb{N}_0$. Ist f ungerade, so gilt $a_k(f) = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

für $k \in \mathbb{N}$.

Der einfache Beweis sei als Übung überlassen.

Beispiel 1. Sei f die 2π-periodische Funktion, die für $x \in [-\pi, \pi]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } -\pi < x < \pi, \\ 0 & \text{falls } x = \pm\pi, \end{cases}$$

gegeben ist. Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos kx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi \cos k\pi}{k} + 0 \right) \\ &= 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Nach Satz 5.6.3 gilt $F(x, f) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$x = 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

für $-\pi < x < \pi$. Für $x = \frac{1}{2}\pi$ erhalten wir die Leibnizsche Reihe für $\frac{1}{4}\pi$, die wir in §4.4 aus der Taylorreihe des Arcus Tangens gewonnen hatten. Einige Fourierpolynome dieser Funktion sind in Abbildung 21 dargestellt.

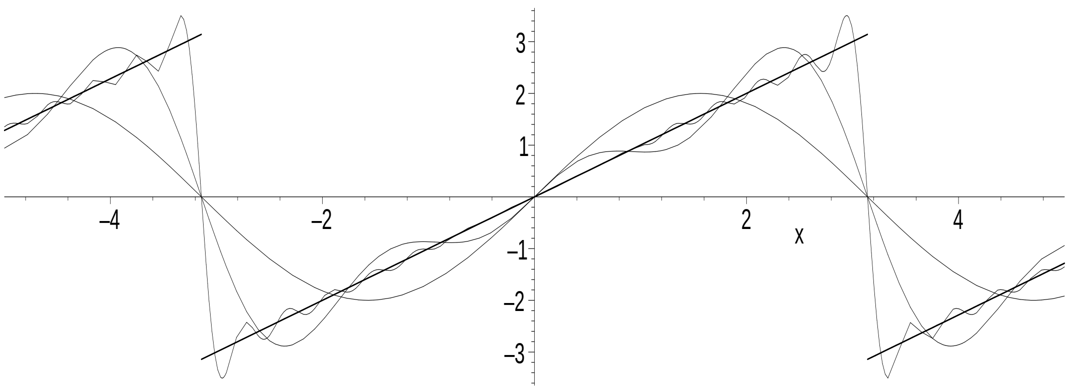


Abbildung 21: Fourierpolynome vom Grad 1, 3 und 15 für $f(x) = x$

Beispiel 2. Sei f die 2π-periodische Funktion, die für $x \in [-\pi, \pi]$ durch $f(x) = x^2$ gegeben ist. Da f gerade ist, gilt $b_k(f) = 0$ für $k \in \mathbb{N}$. Da $f'(x) = 2x$ für $x \in (-\pi, \pi)$, folgt mit Hilfssatz 5.6.1 und Beispiel 1, dass

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \\ &= \frac{\widehat{f'}(k)}{ik} + \frac{\widehat{f'}(-k)}{-ik} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{i}{k}\left(\widehat{f'}(k) - \widehat{f'}(-k)\right) \\
&= -\frac{1}{k} b_k(f') \\
&= -4\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \\
&= 4\frac{(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}
$$

für $k \in \mathbb{N}$ und

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^2.$$

Da $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2$ konvergiert, folgt mit Satz 5.6.2, dass $f(x) = F(x, f)$, also

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx$$

für $-\pi \leq x \leq \pi$. Einige Fourierpolynome dieser Funktion sind in Abbildung 22 dargestellt.

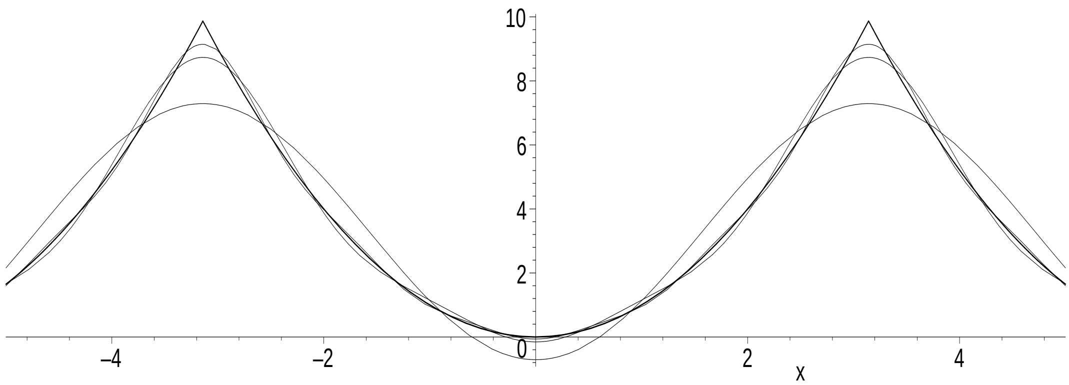


Abbildung 22: Fourierpolynome vom Grad 1, 3 und 5 für $f(x) = x^2$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$0 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}$$

und damit

$$\frac{1}{12}\pi^2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \dots.$$

Für $x = \pi$ erhalten wir

$$\pi^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}(-1)^k$$

und damit

$$\frac{1}{6}\pi^2 = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots.$$

Beispiel 3. Sei f die 2π-periodische Funktion, die für $x \in [-\pi, \pi]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x = \pm\pi, \end{cases}$$

gegeben ist. Da f ungerade ist, gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und eine Rechnung zeigt, dass

$$b_k(f) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade}, \\ \frac{4}{\pi k} & \text{falls } k \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Nach Satz 5.6.3 gilt wieder $F(x, f) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Einige Fourierpolynome dieser Funktion sind in Abbildung 23 dargestellt.

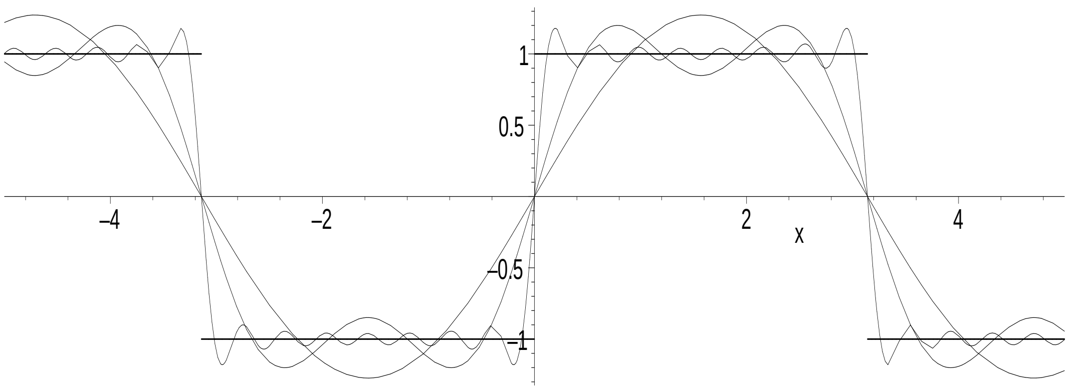


Abbildung 23: Fourierpolynome vom Grad 1, 3 und 15.

5.7 Uneigentliche Integrale

Bei der Definition von $\int_I f$ haben wir vorausgesetzt, dass I kompakt ist, und aus der Existenz des Integrals konnte die Beschränktheit von f gefolgert werden (Satz 5.1.3). Wir werden jetzt $\int_I f$ in einigen Fällen definieren, in denen I nicht kompakt oder f nicht beschränkt ist.

Definition 5.7.1 Sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a, b) \to \mathbb{C}$. Für alle $c \in [a, b)$ sei f integrierbar über $[a, c]$. Existiert dann $\lim_{c \to b} \int_a^c f$, so heißt f *uneigentlich integrierbar* über $[a, b)$. Der Grenzwert heißt *uneigentliches Integral* von f über $[a, b)$ und wird mit $\int_a^b f$ bezeichnet.

Man sagt auch, dass das uneigentliche Integral *konvergiert* (bzw. *divergiert*). Analog definiert man für $-\infty \leq a < b < \infty$ und $f : (a, b] \to \mathbb{C}$ das uneigentliche Integral $\int_a^b f$. Im Falle $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ sagt man, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f$ existiert, wenn für $c \in (a, b)$ die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^c f$ und $\int_c^b f$ existieren. Man setzt dann $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. (Dies hängt nicht von c ab.)

Beispiele. 1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ gilt

$$\int_1^r \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\left(r^{1-\alpha} - 1\right) & \text{falls } \alpha \neq 1, \\ \ln r & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Es folgt, dass $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert, mit $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, während $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ divergiert.

2. Wir können in obigem Beispiel auch den Grenzwert für $r \to 0$ betrachten und erhalten, dass $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ für $\alpha < 1$ konvergiert und den Wert $\frac{1}{\alpha-1}$ hat, während das Integral für $\alpha \geq 1$ divergiert.

3. Es ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to-\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a\to-\infty} (-\arctan a) + \lim_{b\to-\infty} \arctan b \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

4. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

existiert nicht, denn

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(1+r^2\right) = \infty,$$

womit

$$\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

nicht existiert. (Auch

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

existiert nicht. Man beachte aber, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0$$

gilt.)

Satz 5.7.1 (Cauchykriterium für uneigentliche Integrale) *Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b) \to \mathbb{C}$. Für alle $c \in [a,b)$ sei f integrierbar über $[a,c]$. Dann konvergiert $\int_a^b f$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x, y aus dem Intervall $(b-\delta, b)$ die Abschätzung $\left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$ gilt.*

In Quantorenschreibweise lautet die Bedingung aus dem Cauchykriterium wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in (b-\delta, b) : \left| \int_x^y f \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Man wende das Cauchykriterium für Funktionengrenzwerte (Satz 3.3.4) auf $F(x) := \int_a^x f$ und beachte, dass $F(y) - F(x) = \int_x^y f$. □

Ist $b = \infty$ in Satz 5.7.1, so lautet das das Cauchykritierium: $\int_a^\infty f$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists r \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in (r, \infty) : \left| \int_x^y f \right| < \varepsilon.$$

Satz 5.7.2 (Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale) *Seien* $-\infty < a < b \le \infty$, $f : [a,b) \to \mathbb{C}$ *und* $g : [a,b) \to \mathbb{R}$. *Für alle* $c \in [a,b)$ *seien* f *und* g *integrierbar über* $[a,c]$ *und es gelte* $|f(x)| \le g(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$. *Konvergiert dann* $\int_a^b g$, *so konvergieren auch* $\int_a^b |f|$ *und* $\int_a^b f$.

Beweis. Wegen

$$\left|\int_x^y f\right| \le \int_x^y |f| \le \int_x^y g$$

für alle $x, y \in (a,b)$ folgt die Behauptung direkt aus dem Cauchykriterium. □

Durch Kontraposition kann man mit dem Vergleichskriterium natürlich auch Divergenz nachweisen.

Die Sätze 5.7.1 und 5.7.2 und die Bemerkungen dazu gelten analog für Funktionen $f : (a,b] \to \mathbb{C}$, $-\infty \le a < b < \infty$.

Beispiel. Wegen $|\sin t| \le 1$ für $t \in \mathbb{R}$ konvergiert

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

nach Vergleichskriterium und Beispiel 1 nach Definition 5.7.1 für $\alpha > 1$.

Tatsächlich konvergiert das Integral sogar für $\alpha > 0$, denn für $y > x > (2\varepsilon)^{-1/\alpha} > 1$ ist

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^y \frac{\sin t}{t^\alpha} dt\right| &\overset{\text{part. Int.}}{=} \left|-\frac{\cos t}{t^\alpha}\Big|_x^y - \alpha \int_x^y \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} dt\right| \\
&\le \frac{|\cos y|}{y^\alpha} + \frac{|\cos x|}{x^\alpha} + \alpha \int_x^y \frac{|\cos t|}{t^{\alpha+1}} dt \\
&\le \frac{1}{y^\alpha} + \frac{1}{x^\alpha} + \alpha \int_x^y \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \\
&= \frac{2}{x^\alpha} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

und die Konvergenz folgt mit dem Cauchykriterium. Man kann hieraus folgern, dass

$$\int_0^\infty \sin t^2 dt$$

konvergiert, denn für $0 < x < y < \infty$ folgt mit der Substitutionsregel

$$\int_x^y \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{y}} \frac{\sin s}{\sqrt{s}} ds.$$

Satz 5.7.3 (Integralkriterium für Reihen) *Sei* $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ *monoton fallend. Dann konvergiert* $\int_1^\infty f(x)dx$ *genau dann, wenn* $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ *konvergiert.*

Beweis. Nach Satz 5.1.12 ist f über kompakte Teilintervalle von $[1,\infty)$ integrierbar. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k)$$

und damit folgt

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} f(k) \leq \int_m^n f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n} f(k)$$

für $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$. Die Behauptung folgt aus dem Cauchykriterium. $\square$

Beispiel. 1. Für $\alpha > 1$ konvergiert

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\alpha},$$

da

$$\int_2^r \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha+1)(\ln x)^{\alpha+1}}\bigg|_2^r.$$

2. Die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

divergiert, da

$$\int_2^r \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x \bigg|_2^r.$$

5.8 Bogenlänge ebener Kurven

Bisher haben wir Integrale als Flächeninhalt interpretiert. Wir können Integrale auch zur Berechnung von Kurvenlängen benutzen. Dabei ist eine (ebene) Kurve eine stetige Abbildung eines Intervalls nach $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Die Idee ist, Kurven durch Streckenzüge zu approximieren.

Als *Beispiel* betrachten wir die durch $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (1 - \cos t)e^{it}$ gegebene Kurve; vgl. Abbildung 24. Betrachtet man diese Funktion im Intervall $[0, 2\pi]$, erhält man die sogenannte *Kardioide*.

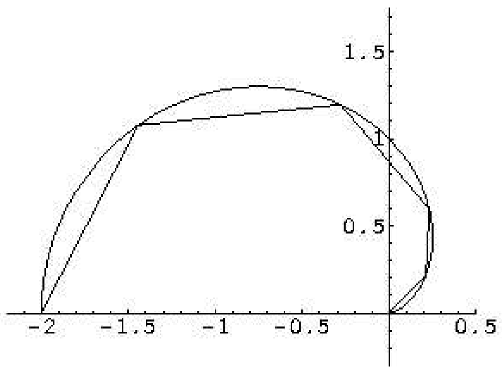


Abbildung 24: Approximation einer Kurve durch einen Streckenzug.

Definition 5.8.1 Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Für eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von I sei

$$L(f, Z) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

und es sei

$$L(f) := \sup L(f, Z),$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen Z von I zu nehmen ist. Ist $L(f) < \infty$, so heißt f *rektifizierbar* und $L(f)$ heißt *Länge* von f.

Satz 5.8.1 *Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Dann ist f rektifizierbar und $L(f) = \int_I |f'|$.*

Beweis. Sei $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ Zerlegung von I. Nach Satz 4.2.5 existieren $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \le |f'(\xi_k)|(x_k - x_{k-1})$. Mit $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ folgt $L(f, Z) \le S(|f'|, Z, \xi)$ und damit $L(f) \le \int_I |f'| < \infty$.

Damit ist f rektifizierbar und für $x, y \in I$ mit $x < y$ auch $f|[x, y]$ rektifizierbar mit $L(f|[x, y]) \le \int_x^y |f'|$. Wir definieren $\ell : I \to \mathbb{R}$ durch $\ell(x) = L(f|[x_0, x])$. Dann gilt $\ell(y) - \ell(x) = L(f|[x, y])$ und damit

$$|f(y) - f(x)| = L(f|[x, y], \{x, y\}) \le L(f|[x, y]) = \ell(y) - \ell(x) \le \int_x^y |f'|$$

für $x, y \in I$ mit $x < y$. Division durch $y - x$ und Grenzübergang $x \to y$ bzw. $y \to x$ liefert, dass ℓ differenzierbar ist, mit $\ell' = |f'|$. Die Behauptung folgt aus dem Hauptsatz. $\square$

Beispiele. 1. Sei $c > 0$ und $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{ct} e^{it} = e^{(c+i)t}$. Dann gilt $f'(t) = (c + i)e^{(c+i)t}$ und $|f'(t)| = |c + i| e^{ct} |e^{it}| = \sqrt{c^2 + 1}\, e^{ct}$. Es folgt

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \sqrt{c^2 + 1} e^{ct} dt = \sqrt{c^2 + 1}\, \frac{e^{ct}}{c}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{c} \left(e^{2\pi c} - 1\right).$$

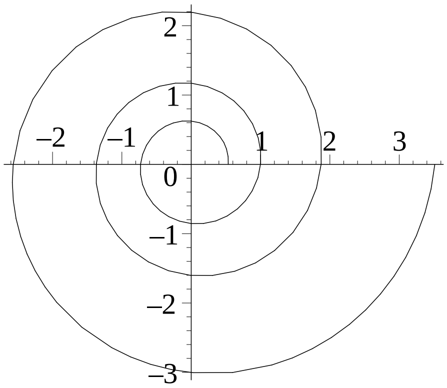
Die durch f gegebene Kurve heißt *logarithmische Spirale*. Für $c = 1/10$ ist der durch $-2\pi \le t \le 4\pi$ gegebene Teil im linken Bild der Abbildung 25 dargestellt.

2. Sei $c > 0$ und $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $f(t) = cte^{it}$. Dann gilt $f'(t) = c(1 + it)e^{it}$ und $|f'(t)| = c|1 + it| = c\sqrt{1 + t^2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} L(f) &= c \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} dt \\ &= \frac{c}{2} \left(t\sqrt{1 + t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right)\bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{c}{2} \left(2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln\left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Die durch f gegebene Kurve heißt *Archimedische Spirale*.

Für $c = 1/2\pi$ ist der durch $0 \le t \le 3$ gegebene Teil im rechten Bild der Abbildung 25 dargestellt.



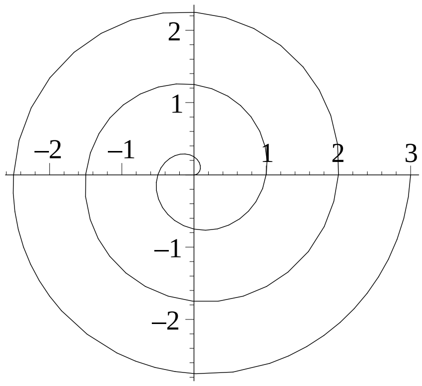


Abbildung 25: Logarithmische Spirale (links) und Archimedische Spirale (rechts).

3. Sei I kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Die Länge des Graphen von f ist die Länge der durch $t \mapsto (t, f(t)) = t + if(t)$ gegebenen Kurve. Für stetig differenzierbares f ist diese durch $\int_I \sqrt{1 + f'(t)^2}dt$ gegeben.

Für die Länge L des Graphen des durch $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ Parabelstücks gilt also

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right).$$