Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Nachholklausur zur Analysis II

24. Oktober 2007

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden.

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Namen zu versehen.
Bearbeitungszeit: 3 Stunden

1. (a) Wie lautet die Definition des Begriffs „kompakt"?
   (b) Wie lautet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung?
   (c) Wie lautet die Definition der (totalen) Differenzierbarkeit?

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass

$$\left| \int_a^b f(x)dx - (b-a)f(a) \right| \leq \frac{L}{2}(b-a)^2 \ .$$

3. Zeigen Sie, dass

$$\int_1^2 \frac{x^4+4}{x^3+2x} dx = \frac{3}{2} \ .$$

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion, die für $-\pi < x \leq \pi$ durch $f(x) = |x|$ gegeben ist. Berechnen Sie die Fourierreihe von f. Ausdrücke wie $\cos k\pi$, $\sin k\pi$ usw. sind dabei zu vereinfachen.

   Konvergiert die Reihe gleichmäßig?

5. Seien (M, d) metrischer Raum und $a, b \in M$. Sei $K > d(a, b)$ und

$$A = \{x \in M : \ d(x, a) + d(x, b) < K\} \ .$$

   Zeigen Sie, dass A offen, beschränkt und nicht leer ist.

6. Seien (M, d) metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn für jedes offene Intervall I auch sein Urbild $f^{-1}(I)$ offen ist.

7. Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar in $(0,0)$ mit

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = f_1(t,t) + f_2(t,t)$. Zeigen Sie, dass g differenzierbar in 0 ist und berechnen Sie $g'(0)$.

8. Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + |y|^5} & , \quad \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{falls } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren, aber f in $(0,0)$ nicht stetig ist.

9. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 4 \arctan(x+y) - 2x - y^2 \ .$$

Viel Erfolg!