Prof. Dr. W. Bergweiler　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Sommersemester 2000

Nachholklausur zu Analysis II
12. Oktober 2000

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Die Klausur hat bestanden, wer insgesamt mindestens 24 der 54 zu vergebenden Punkte erreicht hat. Viel Erfolg !

1. Wie lautet

   (1) die Definition des Begriffs "unzusammenhängend" ?

   (2) die Definition der (totalen) Differenzierbarkeit ?

   (3) der Banachsche Fixpunktsatz ?

2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^2 \frac{2x^3-1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

3. (1) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.

   (2) Existiert das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{\cos t}}{t\sqrt{t+1}}\,dt$?

4. Es sei $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definiert durch $(T(f))(x) = \int_0^x f(t)dt$. Zeigen Sie, daß bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ in $C[0,1]$ gilt: $T \in L(C[0,1], C[0,1])$.

5. Es sei (M,d) metrischer Raum und $d' : M \times M \to [0,\infty), (x,y) \mapsto \min\{d(x,y),1\}$. Zeigen Sie:

   (1) (M,d') ist metrischer Raum.

   (2) Ist $U \subset M$, so ist U genau dann offen in (M,d'), wenn U offen in (M,d) ist.

6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $(0,0)$ differenzierbare Funktion mit $f(0,0) = 0$ und $\operatorname{grad} f(0,0) = (2,3)$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(f(x,y), f(x,y))$$

   in $(0,0)$ differenzierbar ist und berechnen Sie $\operatorname{grad} h(0,0)$.

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (e^{x+y}, x^2+y)$. Zeigen Sie, daß Umgebungen U von $(0,0)$ und V von $(1,0) = f(0,0)$ existieren, so daß $f : U \to V$ bijektiv ist. Sei $g : V \to U$ die Umkehrfunktion von $f : U \to V$. Berechnen Sie die Funktionalmatrix $J_g(1,0)$.

8. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ Banachraum und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $\xi \in V$. Die Funktion f habe in ξ ein lokales Maximum. Zeigen Sie, daß $Df(\xi) = 0$ gilt.

9. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y\sqrt{1+x^2} + x^2 + y^2$$