Prof. Dr. W. Bergweiler/Dr. D. Bargmann SS 1997

Nachklausur zu Analysis II

15. Oktober 1997

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Wer insgesamt mindestens 24 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden. Viel Erfolg!

1. Wie lautet

   (1) die Definition der (totalen) Differenzierbarkeit ?

   (2) die Definition einer offenen Menge in einem metrischen Raum ?

   (3) der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ?

2. Berechne das Integral $\int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x(e^x+1)}\,dx$.

3. Berechne die Bogenlänge der Kurve $\gamma : [1,4] \to \mathbb{C}, t \mapsto t^2 e^{it}$.

4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Sei $f : K \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeige, daß $f(K)$ beschränkt ist.

5. Zeige, daß durch
$$(x,y) \mapsto |e^x - e^y|$$
eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ definiert wird. Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ vollständig ?

6. Definiere
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (1) Zeige, daß alle Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren.

   (2) Ist f (total) differenzierbar in $(0,0)$?

7. Sei X ein Banach-Raum über $\mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to X$ differenzierbar, und sei $A \in L(X, \mathbb{R})$. Zeige, daß $A \circ f$ differenzierbar ist und gilt: $(A \circ f)' = A \circ (f')$.

8. Sei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. Bestimme die Menge der Punkte in H, in denen die Funktion
$$f : H \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 2\arctan(\frac{y}{x}) + \ln(x^2+y^2) + \frac{2}{x}$$
ein lokales Extremum besitzt.

9. Definiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $(x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

   (1) Zeige, daß es zu jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ Umgebungen U von (x,y) in $\mathbb{R}^2$ und V von $f(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ so gibt, daß die Funktion $U \to V, (x,y) \mapsto f(x,y)$ bijektiv ist und eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt.

   (2) Ist f injektiv ?