Prof. Dr. W. Bergweiler SS 2007

Klausur zur Analysis II

14. Juli 2007

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Wer insgesamt 24 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden.

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt zu bearbeiten. Jedes Blatt ist mit Matrikelnummer und Name zu versehen.
Bearbeitungszeit: 3 Stunden

1. (a) Wie lautet das Integralkriterium für Reihen?
   (b) Wann heißen zwei Normen auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum äquivalent?
   (c) Wie lautet der Satz von Schwarz über zweite partielle Ableitungen?

2. Berechnen Sie folgende Integrale:
   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$

3. Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Es existiere $K \in \mathbb{R}_+$ mit
$$\left| \int_1^x f(t)\, dt \right| \leq K \cdot \sqrt{x}$$
für alle $x \in [1,\infty)$. Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral
$$\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\, dt$$
existiert.

4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass
$$\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{L\pi}{2k}$$
für $k \in \mathbb{N}$.

   Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\widehat{f}(k) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ikx} dx$.

5. Sei (M,d) metrischer Raum und A zusammenhängende Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass auch $\overline{A}$ zusammenhängend ist. Geben Sie außerdem (ohne Beweis) ein Beispiel an, dass im Allgemeinen $\mathring{A}$ nicht zusammenhängend ist.

6. Sei $(V, \|\cdot\|)$ normierter Raum. Zeigen Sie, dass $d : V \times V \to \mathbb{R},\ d(x,y) = \sqrt{\|x-y\|}$ eine Metrik auf V ist. Zeigen Sie weiterhin, dass es im Falle $V \neq \{0\}$ keine Norm $\|\cdot\|'$ auf V gibt, so dass $d(x,y) = \|x-y\|'$ für alle $x, y \in V$ gilt.

7. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{(x+y)^3}{(x-y)^2+y^4} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Untersuchen Sie f auf Existenz der partiellen Ableitungen in $(0,0)$ und auf Existenz der Richtungsableitungen in $(0,0)$. Falls diese existieren, berechnen Sie sie auch.

   (b) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

8. Sei $p \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}^p$ und $f \in C^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$. Es sei $Df(\xi)$ invertierbar und $A := Df(\xi)^{-1}$. Sei $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p,\ g(x) = x - A(f(x))$. Zeigen Sie, dass g differenzierbar ist und dass $Dg(\xi) = 0$ gilt.

9. Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y > 0\}$ und $f : U \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = z\ln(x+y) - x\arctan z + x^2.$$

   Untersuchen Sie, ob f lokale Extrema besitzt.

Viel Erfolg!