Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2000

Klausur zu Analysis II

15. Juli 2000

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Die Klausur hat bestanden, wer insgesamt mindestens 24 der 54 zu vergebenden Punkte erreicht hat. Viel Erfolg!

1. Wie lautet
   (1) das Integralkriterium für Reihen ?
   (2) die Definition der offenen Überdeckung ?
   (3) die Definition der (totalen) Differenzierbarkeit ?

2. Berechne das Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x+2)(x^2+2x+2)}\,dx$.

3. (1) Berechne das Integral $\displaystyle\int_1^8 \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.
   (2) Prüfe, ob das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(e^x)}{\sqrt{x}}\,dx$ existiert.

4. Überprüfe, ob die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \neq 0 \ \text{ und } \ y \leq \frac{1}{x}\}$
   (1) offen in $\mathbb{R}^2$,
   (2) abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$,
   (3) zusammenhängend

   ist.

5. Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Sei $f : M \to N$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Sei $A \subset M$ totalbeschränkt. Zeige, daß auch $f(A)$ totalbeschränkt ist.

6. Zeige, daß die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   stetig in $(0,0)$ ist, aber nicht (total) differenzierbar in $(0,0)$ ist.

7. Sei V der Raum der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ versehen mit der $||\cdot||_\infty$-Norm. Zeige, daß die Funktion
$$\alpha : V \to \mathbb{C}, f \mapsto \exp(f(0))$$
   (total) differenzierbar ist, und berechne $D\alpha(f)(g)$ für alle $f, g \in V$.

8. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $(0,0)$ differenzierbare Funktion mit $f(0,0) = 0$ und $\operatorname{grad} f(0,0) = (2,3)$. Zeige, daß die Funktion
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x, f(x,x))$$
   in 0 differenzierbar ist, und berechne $h'(0)$.

9. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion
$$f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x(1+y^2) - \ln(xy).$$