Prof. Dr. W. Bergweiler/Dr. D. Bargmann SS 1997

Klausur zu Analysis II

9. Juli 1997

Für die Bearbeitung der folgenden 9 Aufgaben werden jeweils maximal 6 Punkte vergeben. Wer insgesamt mindestens 24 Punkte erreicht hat, hat die Klausur bestanden. Viel Erfolg!

1. Gib die Definitionen der folgenden Begriffe an: (1) (total) differenzierbar, (2) normierter Raum, (3) Häufungspunkt einer Menge.

2. Berechne das Integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3x^2+x+1}{x^3+x}\,dx$.

3. (1) Berechne das Integral $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx$.

   (2) Zeige, daß das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx$ existiert.

4. Seien $(X,d),(Y,d')$ metrische Räume. Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. Zeige, daß gilt:
$$f \text{ ist stetig} \iff \forall A \subset X : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

5. Zeige, daß durch
$$(x,y) \mapsto |x-y| + \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$
eine Metrik d auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ definiert wird. Zeige ferner, daß für jede Teilmenge U von $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt:
$$U \text{ ist offen bezüglich } d \iff U \text{ ist offen bezüglich } |\cdot|.$$

6. Definiere
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   (1) Zeige, daß alle Richtungsableitungen von f in $(0,0)$ existieren.

   (2) Ist f (total) differenzierbar in $(0,0)$?

7. Sei X ein Banach-Raum über $\mathbb{R}$. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f: X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion so, daß für alle $t \in (0,\infty)$ und alle $x \in X$ gilt: $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Zeige, daß für alle $x \in X$ gilt:
$$(Df(x))\,(x) = \alpha f(x).$$

8. Sei $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$. Definiere
$$f: U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 8\,(x-y)^{\frac{3}{2}} + y^2 + xy.$$
Bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 von f um den Entwicklungspunkt $(1,0)$ und zeige, daß für alle $(x,y) \in U$ mit $||(x,y)-(1,0)||_\infty \leq \frac{1}{4}$ gilt:
$$|f(x,y) - T_2(x,y)| \leq 8\sqrt{2}\,||(x,y)-(1,0)||_\infty^3.$$

9. Bestimme die Menge der Punkte in $\mathbb{R}^2$, in denen die Funktion
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto 8\ln(x^2+1) - 2x^2(y+1) + y^2$$
ein lokales Extremum besitzt.