Übungen zu Analysis II

Serie 9

33. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

    (1) X ist zusammenhängend.

    (2) Jede stetige Abbildung $f : X \to \{0, 1\}$ ist konstant.

    (3) Für jede Menge Y und jede Funktion $f : X \to Y$, die lokal konstant ist (d.h. zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung U von x in X derart, daß $f|_U$ konstant ist), gilt: f ist konstant.

    Hinweis zu $(1) \Longrightarrow (3)$*:* Fixiere $x \in X$ und zeige, daß die Menge

    $$M := \{z \in X\ ;\ f(z) = f(x)\}$$

    eine nicht-leere offene und zugleich abgeschlossene Teilmenge von X ist.

34. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $\mathcal{Z}$ eine Menge von zusammenhängenden Teilmengen von X derart, daß gilt:

    $$\bigcap_{Z \in \mathcal{Z}} Z \neq \emptyset.$$

    Zeige, daß auch die Menge $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z$ zusammenhängend ist.

35. **Definition 1** *Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und f und f^{-1} stetig sind. Im Falle der Existenz eines solchen Homöomorphismus heißen M und N homöomorph.*

    Zeige, daß die Menge

    $$S^1 := \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}$$

    nicht homöomorph zu einem Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

36. Definiere

    $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \frac{x-y}{x^2+y^2} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

    (1) Zeige, daß f partiell differenzierbar ist.

    (2) Untersuche die partiellen Ableitungen von f auf Stetigkeit.

    (3) Untersuche die Existenz der zweiten partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$.

Abgabe: bis Freitag, den 16. Juni 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.