Übungen zu Analysis II

Serie 7

25. Seien $(M, d_M), (N, d_N)$ metrische Räume, und sei $f : M \to N$ eine Funktion. Zeige, daß f genau dann stetig ist, wenn für jedes $x \in M$ und jedes $A \subset M$ gilt:

$$x \in \overline{A} \implies f(x) \in \overline{f(A)}.$$

26. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Definiere

$$\alpha : C([a,b]; \mathbb{C}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \max\{\mathrm{Re}(f(x))\ ;\ x \in [a,b]\}.$$

Überprüfe, für welche der Normen $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_1$ auf $C([a,b])$ die Abbildung α stetig ist.

27. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Sei $f : M \to M$ eine Abbildung derart, daß ein $c \in (0,1)$ existiert mit der Eigenschaft, daß für alle $x, y \in M$ gilt:

$$d(f(x), f(y)) \leq c\, d(x,y).$$

Zeige, daß die Abbildung f genau einen Fixpunkt besitzt.

Hinweis: Wähle $x \in M$ beliebig und zeige, daß die durch

$$x_0 = x \quad \text{und} \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in M ist.

28. Seien $(U, ||\cdot||_U), (V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ normierte Räume. Sei $B : U \times V \to W$ eine bilineare Abbildung, d.h. für alle $u \in U$ und alle $v \in V$ sind die Abbildungen $B(u,\cdot)$ und $B(\cdot, v)$ linear. Zeige, daß B genau dann stetig ist, wenn ein $c \in \mathbb{R}_+$ existiert mit

$$||B(u,v)||_W \leq c||u||_U||v||_V$$

für alle $u \in U$ und $v \in V$.

Abgabe: bis Freitag, den 2. Juni 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.