Übungen zu Analysis II

Serie 6

21. Seien $(M, d_M), (N, d_n)$ metrische Räume. Zeige, daß durch

$$d((m_1, n_1), (m_2, n_2)) := d_M(m_1, m_2) + d_N(n_1, n_2)$$

eine Metrik d auf $M \times N$ definiert wird derart, daß für alle $A \subset M$ und $B \subset N$ gilt: $A \times B$ ist genau dann offen (bezüglich d), wenn A offen ist (bezüglich d_M) und B offen ist (bezüglich d_N).

22. Definiere

$$||\cdot|| : C^1([0,1]) \to [0, \infty), f \mapsto ||f||_\infty + ||f'||_\infty.$$

Zeige, daß gilt:

(1) $||\cdot||$ ist eine Norm auf $C^1([0,1])$.

(2) Der Raum $(C^1([0,1]), ||\cdot||)$ ist vollständig.

(3) Die durch

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$$

definierte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^1([0,1])$ konvergiert bezüglich $||\cdot||_\infty$ gegen 0, aber nicht bezüglich $||\cdot||$.

23. Definiere

$$\begin{aligned} M &:= \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\}, \\ N &:= \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}(z) > 0\}, \\ P &:= \{z \in \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Im}(z) \neq 0\}, \\ Q &:= \{z \in \mathbb{C}\,; |z| \leq 1 \text{ und } \mathrm{Im}(z) > 0\} \end{aligned}$$

(1) Prüfe die Menge Q auf relative Abgeschlossenheit in M und in N und auf relative Offenheit in M.

(2) Prüfe die Menge N auf relative Offenheit und relative Abgeschlossenheit in P.

24. Bezeichne l_2 die Menge aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2$ konvergiert.

(1) Zeige, daß für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n|$ konvergiert.

(2) Zeige, daß l_2 (versehen mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation) ein Untervektorraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums aller Folgen in $\mathbb{C}$ ist.

(3) Zeige, daß durch

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle_2 \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}$$

ein Skalarprodukt auf l_2 definiert wird.

(4) *Zusatz:* Zeige, daß $(l_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ vollständig (also ein Hilbert-Raum) ist.

Abgabe: bis Freitag, den 26. Mai 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.