Übungen zu Analysis II

Serie 4

13. Berechne das Integral

$$\int_1^2 \frac{3x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 1}{(x^2+1)^2 x}\, dx.$$

14. Bestimme die Taylorreihe von $\sqrt{\cdot}$ in 1 und zeige, daß die Taylorreihe auf dem Intervall $(0,2)$ punktweise gegen $\sqrt{\cdot}$ konvergiert.

15. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen derart, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Definiere

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

Zeige, daß f integrierbar ist und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx.$$

Hinweis: Zeige zunächst, daß für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ikx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad k \neq n \\ 2\pi & \text{falls} \quad k = n \end{cases}$$

16. Berechne für jedes $a \in (0, \infty)$ das Integral

$$\int_0^a \sqrt{1+x^2}\, dx.$$

Hinweis: Substituiere mit $t = x + \sqrt{1+x^2}$.

Abgabe: bis Freitag, den 12. Mai 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.