Übungen zu Analysis II

Serie 3

9. Berechne die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t \, dt \quad , \quad \int_1^e x^3 \ln x \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} e^{-x} \cos(3x) \, dx.$$

10. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeige, daß gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx = 0.$$

Hinweis: Zeige, daß die Integrale $\int_a^b f(x) \sin(nx) \, dx$ und $-\int_{a-\frac{\pi}{n}}^{b-\frac{\pi}{n}} f(x + \frac{\pi}{n}) \sin(nx) \, dx$ übereinstimmen, und addiere sie.

11. Berechne die Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{2}}{3 - \cos x} \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3 - \cos x} \, dx.$$

Hinweis: Zeige zunächst, daß für alle $x \in (-\pi, \pi)$ gilt:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})},$$

und substituiere mit $t = \tan(\frac{x}{2})$.

12. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeige, daß ein $\xi \in (0, 1)$ existiert mit

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(\xi).$$

Hinweis: Definiere

$$\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{2}(1 - x)$$

und wende auf $\int_0^1 f(x)\phi''(x)dx$ zweimal partielle Integration an.

Abgabe: bis Freitag, den 5. Mai 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.