Übungen zu Analysis II

Serie 13

49. Bestimme die Menge aller Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen der Umkehrsatz auf die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x \cos y, ye^x)$$

anwendbar ist. Gibt es eine Umgebung des Punktes $(0, \frac{\pi}{2})$, auf der f injektiv ist ?

50. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ definiere

$$Q_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + c.$$

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $c_0 \in \mathbb{R}$ derart, daß die n-fache Hintereinanderausführung $Q_{c_0}^n$ von Q_{c_0} einen Fixpunkt p_{c_0} besitzt mit $|(Q_{c_0}^n)'(p_{c_0})| < 1$. Zeige, daß ein $\varepsilon > 0$ so existiert, daß für jedes $c \in (c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon)$ die Funktion Q_c^n einen Fixpunkt p_c besitzt mit $|(Q_c^n)'(p_c)| < 1$.

51. Definiere

$$M := \{(x, y, z) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, \infty) \; ; \; x^z + y^z = 1\}.$$

Zeige, daß eine stetig differenzierbare Funktion $f : (0, 1)^2 \to (0, \infty)$ existiert derart, daß gilt:

$$M = \{(x, y, f(x, y)) \; ; \; (x, y) \in (0, 1)^2\}.$$

Berechne die Ableitung dieser Funktion f an der Stelle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

52. Leite den Satz über implizite Funktionen aus dem Umkehrsatz her.

Hinweis. Man betrachte die Funktion

$$f : G \times H \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, (x, y) \mapsto (x, F(x, y)).$$