Übungen zu Analysis II

Serie 11

41. Seien $(V, ||\cdot||_V), (W, ||\cdot||_W)$ Banachräume. Seien $U \subset V$ offen und $\xi \in U$. Seien $f : U \to \mathbb{R}$ und $g : U \to W$ in ξ differenzierbare Funktionen. Zeige, daß auch die Funktion $f \cdot g$ in ξ differenzierbar ist, und gib eine Formel zur Berechnung von $D(f \cdot g)(\xi)$ an.

42. Zeige, daß die Abbildung
$$\alpha : C([0,1]) \to C([0,1]), f \mapsto f^2$$
differenzierbar ist, und berechne $(D\alpha(f))(g)$ für $f, g \in C([0,1])$.

43. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Seien $U \subset \mathbb{R}^p$ und $V \subset \mathbb{R}^q$ offen, und sei $\xi \in U$. Sei $g : U \to \mathbb{R}^q$ eine in ξ differenzierbare Funktion mit $g(U) \subset V$, und sei $f : V \to \mathbb{R}$ eine in $g(\xi)$ differenzierbare Funktion. Sei $j \in \{1, ..., p\}$. Formuliere und beweise eine Formel, die angibt, wie sich $\partial_j(f \circ g)(\xi)$ aus den partiellen Ableitungen von f und denen der Komponentenfunktionen von g berechnen läßt.

44. Definiere
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x^2y^3, ye^x).$$
Zeige, daß für alle $p, q \in \mathbb{R}^2$ mit $||p||_\infty < 1$ und $||q||_\infty < 1$ gilt:
$$||f(p) - f(q)||_\infty \leq 2e||p - q||_\infty.$$

Abgabe: bis Freitag, den 30. Juni 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.