Übungen zu Analysis II

Serie 10

37. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Sei $\xi \in U$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

    (1) f ist Lipschitz-stetig, d.h. es gibt eine Konstante $c > 0$ so, daß für alle $x, y \in U$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq c||x - y||$.

    (2) Sämtliche Richtungsableitungen von f in ξ existieren.

    Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $\gamma : I \to U$ eine in 0 differenzierbare Funktion mit $\gamma(0) = \xi$. Zeige, daß $f \circ \gamma$ in 0 differenzierbar ist und gilt:

$$(f \circ \gamma)'(0) = \partial_{\gamma'(0)} f(\xi).$$

38. Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{falls} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

    Zeige, daß sämtliche Richtungsableitungen von f in $(0, 0)$ existieren, aber f in $(0, 0)$ nicht stetig ist.

39. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 2$. Definiere

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{||x||_2^{n-2}}.$$

    Zeige, daß f zweimal partiell differenzierbar ist und für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f(x) = 0.$$

40. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, daß die Funktion

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{||x||_2} f(t)\, dt$$

    partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen stetig sind.

Abgabe: bis Freitag, den 23. Juni 2000, 11^{00} Uhr im Schrein.