Übungen zu Analysis II

Serie 1

1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

   Definition *f heißt* konvex, *wenn für $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:*
   $$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$
   Gilt hier immer "$<$", so heißt f streng konvex. *Gilt immer "$\geq$" bzw. "$>$", so heißt f* (streng) konkav.

   Gelte: f ist differenzierbar und in $\operatorname{int}(I)$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$. Zeige, daß f konvex ist und sogar streng konvex ist, falls stets "$>$" gilt.

   Hinweis: Vergleiche die Steigung der Sekanten durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x, f(x))$ mit der Steigung der Sekanten durch $(x, f(x))$ und $(x_2, f(x_2))$.

2. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zeige, daß genau ein $\phi \in (-\pi, \pi]$ existiert mit
   $$z = |z| \exp(i\phi) = |z|(\cos\phi + i \sin\phi).$$
   Anmerkung: Man nennt dies die *Polarkoordinatendarstellung* von z. ϕ heißt das *Argument* von z.

3. Zeige, daß für alle $x \in [1, \infty)$ gilt:
   $$\arctan\sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \arcsin\left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{\pi}{4}.$$
   Hinweis: Satz 4.3.1.

4. Beweise den folgenden

   Satz 5.1.6 (Riemannsches Integrabilitätskriterium) *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

   (i) *f ist integrierbar,*

   (ii) $\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$,

   (iii) *Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z mit $\overline{S}(Z) - \underline{S}(Z) < \varepsilon$.*

   Im Falle der Integrierbarkeit gilt $\int_I f = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f$.

E. Definiere
   $$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, z \mapsto \ln\left(x^4 + 4\right) + 4 \arctan\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) - 4x.$$
   (1) Bestimme die lokalen Extrema und die Monotonieintervalle von f.

   (2) Bestimme das Verhalten von f am Rand der beiden Definitionsintervalle $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$.

   (3) Läßt sich f stetig in den Punkt 0 fortsetzen ?

   (4) Fertige eine Skizze des Graphen von f an.

Abgabe: bis Donnerstag, den 20. April, 11^{00} Uhr im Schrein.