Prof. Dr. W. Bergweiler Sommersemester 2000

Übungen zu Analysis II

Serie 14

Aufgaben zur Integration

53. Für eine Teilmenge A von [0,1] bezeichne χ_A die Funktion

$$[0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & \text{falls} \quad x \in [0,1] \setminus A \end{cases}.$$

(1) Sei $p \in [0,1]$. Zeige, daß die Funktion $\chi_{\{p\}}$ Riemann-integrierbar ist. Leite daraus ab, daß für jede endliche Teilmenge E von [0,1] die Funktion χ_E Riemann-integrierbar ist.

(2) Zeige, daß die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

54. Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$$

definierte Folge reeller Zahlen. Leite mittels partieller Integration eine Rekursionsformel vom Typ $I_n = c_n I_{n-2}$ her und berechne I_5.

55. Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Zeige, daß gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varepsilon f(x)}{\varepsilon^2 + x^2}\, dx \quad = \quad f(0).$$

Hinweis: Verifiziere die Aussage für die Spezialfälle

1. f ist konstant (geeignete Substitution),
2. $f(0) = 0$ (Aufspaltung von $\int_{-1}^{1}$ in $\int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1}$).

56. Berechne für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$. Dabei sei $f(x) :=$

a) $\dfrac{x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x + 3}{(x^2+1)^2(x^2+2x+1)}$, b) $\dfrac{x^4+1}{(x-1)(x^2+1)^2}$, c) $\dfrac{3x^3 - 2x + 5}{x^2 - 4x + 3}$,

d) $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x - 2}$, e) $\dfrac{6x+1}{(x^2 - 6x + 18)^2}$, f) $\dfrac{5x^2 - 7x + 6}{x^3 - 3x^2 + 4}$,

g) $\dfrac{4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 10x - 6}{x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 10x^2}$, h) $\dfrac{x^5+1}{x^2+x^3}$, i) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{(2x+5)(x^2-1)}$,

j) $\dfrac{6x^2 + x + 3}{3x+5}$, k) $\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$.

Hinweis zu k): $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$.

57. Zeige, daß gilt:

$$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{2x^2 - 2x + 10}{x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi}{36}.$$

58. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, und $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Berechne für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.
Dabei sei $f(x) :=$

a) $\dfrac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$, b) $x\sqrt[k]{ax+b}$, c) $\dfrac{x}{\sqrt[k]{ax+b}}$, d) $\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x}$,

e) $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{2x+1}}$, f) $\dfrac{1}{x+1}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, g) $\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, h) $\dfrac{1}{x\sqrt{4-x}}$.

59. Berechne für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(\varphi)\,d\varphi$.
Dabei sei $f(\varphi) =$

a) $\dfrac{2}{5-3\cos\varphi}$, $(\alpha, \beta \in (-\pi, \pi))$ b) $\dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi - 1}$, c) $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi + 1}$

d) $\dfrac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi}$, e) $\dfrac{2+\tan^2\varphi}{\sin 2\varphi}$.

60. Die Funktion $f:\ (0,\pi) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) := \frac{(1+\cos x)(2\cot\frac{x}{2} - 2)}{(3 - 2\sin x + \cos x)\sin x}.$$

Bestimme diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\frac{\pi}{2}) = 0$.

61. Berechne für alle zulässigen Integrationsgrenzen $-\pi < \alpha < \beta < \pi$ das Integral $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ mit

$$f(x) = \frac{(cot\frac{x}{2})^2}{(1+\cos x)(\cos x + \sqrt{3}\sin x)}.$$

62. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x\ln x - x}\int_0^x \ln(1+\sin t)\,dt$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \tan^2 x\Big(\int_0^{x^2}\sqrt{1-t^2}dt\Big)^{-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x|\int_0^x \dfrac{t\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^7}\int_1^x e^{-\sqrt{t}}\,dt$,

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}\Big(\int_2^x e^{t^2}\,dt - x + 2\Big)$,

f) $\lim\limits_{x\to e+} (\arctan(x-e))^{-1}\int_e^x u^2\ln^2 u\,du$,

g) $\lim\limits_{x\to 1+} \int_1^{x^2}\ln(\sin(\sqrt{t}\frac{\pi}{2}))dt\Big(\int_0^{\sqrt{x^2-1}} t\ln(t+1)dt\Big)^{-1}$.

Lösungen: a) 0, b) 1, c) 0, d) $+\infty$, e) $e^4 - 1$, f) e^2.

63. Untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz. Bestimme gegebenenfalls die Parameterwerte, für die das Integral existiert.

a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dt}{t\ln^\alpha t}$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\ln x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx$ e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-x} + 3\cos x}{(1+x)(x+2)}\,dx$

f) $B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ ($B(\alpha,\beta)$ heißt Betafunktion)

g) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+x\ln^2 x}$ h) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

i) $\int_1^\infty \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx,\ \int_0^1 \frac{\cos(1/x)}{\sqrt{x}}\,dx$ j) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)(\cos x)}{x^4\tanh x\sin(1/x)}\,dx$

k) $\int_0^\infty \frac{(\sin x)\ln(1+x)}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ l) $\int_2^\infty \frac{x\sin x}{(1+\sqrt{x})(1-x^2)}\,dx$

m) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{t}\arctan t}{(1-\sqrt{t})(1+t^2)}\,dt$ n) $\int_2^\infty \frac{\sqrt{x}(\ln x)\arctan x}{(1+x)(\sqrt{x}-1)}\,dx$

o) $\int_0^1 \frac{e^x-x-1}{x^2\sqrt{x}}\,dx$ p) $\int_2^\infty \frac{(\ln x)^3 x^{(\pi/2-\arctan x)}}{x^3}\,dx$

q) $\int_e^\infty \frac{\cosh x\ln(x-2)}{xe^x(\ln x)^2}\,dx$ r) $\int_e^\infty \frac{\sqrt{3+x^5}\ln x}{x^{\beta+3}}\,dx$

64. Sei $a>0$ und $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ stetig. Zeige:
Ist $\left|\int_a^x f(t)dt\right|\le M$ für alle $x\in[a,\infty)$ $(M>0)$, so existiert für alle $\alpha>0$ das uneigentliche Integral $\int_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$.
Hinweis: Partielle Integration.

65. Zeige mit Hilfe von Aufgabe 64, daß die folgenden uneigentlichen Integrale existieren.

a) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^{1/2}}\,dx$ b) $\int_0^\infty \sin(x^2)dx\left(=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right.$, Fresnelsches Integral)

c) $\int_a^\infty \frac{\sin 2x}{x^\alpha}\,e^{\sin x}\,dx,\ a,\alpha>0$

Hinweis: Substituiere in b) $x^2=t$.

66. Untersuche mit Hilfe des Integralkriteriums folgende Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k\ln^\alpha k}$ $(\alpha\ge 0)$ b) $\sum_{k=1}^\infty \frac{k^{\alpha-1}}{(1+k)^{\alpha+\beta}}$ $(\beta>-1)$

c) $\sum_{k=3}^\infty \frac{1}{k(\ln k)[\ln(\ln k)]^\alpha}$ $(\alpha\ge 0)$ d) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{(1+\pi/2-\arctan k)}}$

Lösungen: a) konvergent für $\alpha>1$, divergent für $0\le\alpha\le 1$,
b) konvergent für $\beta>0$, divergent für $-1<\beta\le 0$,
c) konvergent für $\alpha>1$, divergent für $0\le\alpha\le 1$, d) divergent.

67. a) Zeige die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrals:
$$\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt \quad \text{für } x>0.$$
b) Die Gammafunktion Γ wird definiert über das uneigentliche Integral aus Teil a), d.h. $\Gamma(x):=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$ für $x>0$.
Zeige: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

68. Bestimme die Menge aller $\alpha > 0$, für die das folgende uneigentliche Integral konvergiert:

$$\int_0^\infty \frac{(\sin x)^\alpha (\ln(1+x^3))^2}{x^8} dx.$$

Aufgaben zu Metrischen Räume

69. Wir stellen uns die Menge F aller französischen Bahnstationen als Teilmenge von $\mathbb{C}$ vor, die den Punkt 0 (Paris) enthält. Entsprechend dem radialen Aufbau des Streckennetzes verlangt die französische Eisenbahn für eine Reise von Station z nach Station w den Fahrpreis $p(z,w) := |z-w|$, falls die Stationen auf einer Geraden durch Paris liegen (d.h. falls $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so existieren, daß $\lambda z + \mu w = 0$ ist), und den Fahrpreis $p(z,w) := |z| + |w|$, falls die Stationen auf verschiedenen Geraden durch Paris liegen. Zeige, daß die so definierte Fahrpreisfunktion p eine Metrik auf F ist.

70. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Definiere $d' := \frac{d}{1+d}$.

    (1) Zeige, daß auch d' eine Metrik auf X ist.

    (2) Sei M die Menge aller Folgen in X. Zeige, daß für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ die Reihe

    $$\sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d'(x_n, y_n)$$

    konvergiert, und daß durch

    $$((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} d'(x_n, y_n)$$

    eine Metrik d_M auf M definiert wird.

71. Bezeichne d die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Definiere $A := \{(x,x) | x \in \mathbb{R}\}$ und $B := \{(x,x) | x = 0 \text{ oder } x \in (1,\infty)\}$. Überprüfe für jede der Mengen $\{(0,0)\}$ und $\{(x,x) | x \in (1,\infty)\}$ die Offenheit und Abgeschlossenheit in jedem der metrischen Räume $(A, d_{A\times A})$ und $(B, d_{B\times B})$ und $(\mathbb{R}^2, d)$.

72. Zeige, daß durch

    $$(x,y) \mapsto |\arctan x - \arctan y|$$

    eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ definiert wird, für die gilt:

    (i) Die bezüglich der Metrik d offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die bezüglich der euklidischen Metrik offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.

    (ii) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

73. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Sei $A \subset X$, und seien $f, g : X \to Y$ stetige Funktionen so, daß $f_{|A} = g_{|A}$ ist. Zeige, daß dann auch $f_{|\overline{A}} = g_{|\overline{A}}$ ist.

74. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Seien $A, B \subset X$ so, daß die Abbildungen $f_{|A}$ und $f_{|B}$ stetig sind.

(i) Zeige anhand eines Beispiels, daß die Abbildung $f_{|A\cup B}$ nicht stetig zu sein braucht.

(ii) Zeige, daß die Abbildung $f_{|A\cup B}$ zumindest dann stetig ist, wenn beide Mengen A und B offen oder beide Mengen A und B abgeschlossen sind.

75. Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

(1) Sei $y \in H$. Zeige, daß die Abbildung

$$H \to K, x \mapsto \langle x, y \rangle$$

in $L(H, K)$ liegt, und berechne ihre Operatornorm.

(2) Zeige, daß $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (als Abbildung von $H \times H$ nach K) stetig ist.

76. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^n$. Zeige, daß K genau dann kompakt ist, wenn jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

77. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Sei $f : X \to Y$ eine stetige und injektive Funktion.

(1) Zeige anhand eines Beispiels, daß die Funktion f^{-1} im allgemeinen nicht stetig zu sein braucht.

(2) Zeige, daß f^{-1} zumindest dann stetig ist, wenn X kompakt ist.

78. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, und seien $K \subset X$ und $L \subset Y$. Zeige, daß gilt:

$$K \times L \quad \text{ist kompakt} \quad \Longleftrightarrow \quad K \quad \text{ist kompakt und} \quad L \quad \text{ist kompakt.}$$

79. Überprüfe, ob die Menge

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\; x^3 \leq y < x\}$$

a) offen in $\mathbb{R}^2$, b) abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, c) zusammenhängend ist.

Aufgaben zur Differenzierbarkeit

80. Definiere

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \exp(x)\sin(y).$$

Bestimme das Taylorpolynom T_2 von f um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und zeige durch Abschätzung des Restgliedes, daß für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $||(x, y)||_1 \leq 1$ gilt:

$$|f(x, y) - T_2(x, y)| \leq \frac{e}{6} ||(x, y)||_1^3.$$

81. (1) Bestimme für die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ (bzw. $D \subset \mathbb{R}^3$) die Taylorpolynome erster oder zweiter Ordnung $T_p, p = 1, 2$ bezüglich des Entwicklungspunktes x_0.

(2) Schätze den absoluten Betrag des Restgliedes $R_p = f - T_p$ mit Hilfe der Taylorformel nach oben ab, also $|R_p|_U| \leq \epsilon$, wobei U ein Quadrat (bzw. ein Würfel) ist,d.h.:

$$U = \{(x,y) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\} \qquad \text{bzw.}$$
$$U = \{(x,y,z) : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r, |z - z_0| \leq r\}.$$

a) $f(x,y) = y \arctan x^2,\ x_0 = (1,2),\ r = \frac{1}{10},\ p = 1$

b) $f(x,y) = \frac{4}{\pi}(x^2 + y^2) + \sin^2(x+y),\ x_0 = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}),\ r = \frac{1}{10},\ p = 2$

c) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)},\ x_0 = (1,0),\ 0 < r \leq \frac{1}{2}$ fest, $p = 2$

d) $f(x,y,z) = e^x \cos(y-1) + 3z^2,\ x_0 = (1,1,-1),\ r = \frac{1}{10},\ p = 1$

Lösungen:

a) $T_1(x,y) = \pi/2 + 2(x-1) + \pi/4(y-2)$
$|R_1(x,y)| \leq 6 \cdot 10^{-2}$

b) $T_2(x,y) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + 2(x - \frac{\pi}{8}) + 2(y - \frac{\pi}{8}) + \frac{4}{\pi}(x - \frac{\pi}{8})^2 + \frac{4}{\pi}(y - \frac{\pi}{8})^2$
$|R_2(x,y)| \leq \frac{32}{3}\, 10^{-3}$

c) $T_2(x,y) = \frac{1}{e} - \frac{2}{e}(x-1) - \frac{1}{e}y^2 + \frac{1}{e}(x-1)^2$
$|R_2(x,y)| \leq \frac{56}{3}\, r^3 e^{-1/4}$ (grobe Abschätzung)

(Durch eine etwas feinere Abschätzung erhält man sogar $|R_2(x,y)| \leq \frac{21}{2}\, r^3 e^{-1/4}$)

d) $T_1(x,y,z) = e + 3 + e(x-1) - 6(z+1)$
$|R_1(x,y,z)| \leq \frac{1}{100}(3 + 2e^{11/10}) < \frac{1}{10}$

82. (1) Bestimme für $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ das Taylorpolynom 2. Ordnung T_2 mit Entwicklungspunkt 0 und zeige für $|x| \leq r$, wobei $0 < r \leq 1/\sqrt{2}$ fest, aber beliebig vorgegeben sei, $|R_2(x)| \leq \frac{r^3}{6}$.

(2) Bestimme für $f(x,y) = \sinh x \cosh y$ das Taylorpolynom 2. Ordnung T_2 mit Entwicklungspunkt 0 und zeige für $|x| \leq r, |y| \leq r$, wobei $r > 0$ fest, aber beliebig vorgegeben sei, $|R_2(x,y)| \leq \frac{2}{3} r^3 e^{2r}$.

Lösung: a) $T_2(x) = x$

83. Bestimme für die folgenden Funktionen f die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt x_0 und zeige, daß diese in dem angegebenen Bereich gegen f konvergiert.

a) $f(x) = \ln(1+x),\ x_0 = 0,\ 0 \leq x \leq 1$

b) $f(x) = \frac{1-x}{1+x},\ x_0 = 0,\ 0 \leq x < 1$

c) $f(x) = (1+x)^\alpha,\ x_0 = 0,\ 0 \leq x < 1,\ \alpha \neq 0$

Lösungen: a) $T(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$

b) $T(x) = 1 + 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$

c) $T(x) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$

84. Bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$$

um den Entwicklungspunkt 0. Zeige, daß f auf dem Intervall $[0, 1)$ durch diese Taylorreihe dargestellt wird.

Zusatz: Zeige, daß f sogar auf dem Intervall $(-1, 1)$ durch diese Taylorreihe dargestellt wird.

85. Bestimme die Taylorreihe der Funktion

$$f : (-1, 1)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{1+xy}}{1-y}$$

um den Entwicklungspunkt $(0, 0)$, und zeige, daß f auf dem gesamten Definitionsbereich durch diese Reihe dargestellt wird.

86. Definiere

$$f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^y.$$

Bestimme das Taylorpolynom T_2 von f um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$ und berechne damit einen Näherungswert für $1.05^{1.02}$. Vergleiche diesen mit dem tatsächlichen Wert.

87. Bestimme den maximalen Funktionswert M und den minimalen Funktionswert m von f auf den angegebenen Mengen B.

a) $f(x, y) = e^{x^2+y}(y^2 + y + 1)$, $\quad B = \{(x, y) | y + x^2 \leq 0,\ y \geq -\frac{3}{2}\}$
b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$, $\quad B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$
c) $f(x, y) = (x - y^2)e^{-x^2}$, $\quad B = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1,\ y^2 \leq x\}$
d) $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2(1 + \ln(1 + x^2))$, $\quad B = \{(x, y) |\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$
e) $f(x, y) = e^5 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2 - 35)e^{-x}$, $\quad B = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 36\}$

88. Es sei $G = \{(x, y, z) | x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$. Bestimme mit Hilfe der Lagrangeschen Methode das mögliche Minimum der Funktion $f(x, y, z) = (4 + x)(1 + y)(2 + z)$ auf G unter der Nebenbedingung $xyz = a^3 \quad (a > 0 \quad \text{fest})$.

Lösung: Das mögliche Minimum ist $(2 + a)^3$ in $x_0 = (2a, a/2, a)$.

89. Sei $K := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \leq 1\}$. Bestimme die globalen Extrema der Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 x_2 x_3.$$

Lösung: $max = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $min = -\frac{1}{3\sqrt{3}}$

90. Ermittele die Stellen, wo mögliche Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ (bzw. $g(x,y,z) = 0$) vorliegen.

a) $f(x,y) = (x+4y-1)(1+x^2+4y^2)^{-1/2}$, $\quad g(x,y) = x^2+4y^2-15$
b) $f(x,y) = (2x+y+1)(1+2x^2-4xy+5y^2)^{-1/2}$, $\quad g(x,y) = 2x+y-2$
c) $f(x,y,z) = 12x^2+4y^2-2z^2-8yz$, $\quad g(x,y,z) = 2x^2+y^2+z^2-5$

Lösung: a) $x_0 = (\sqrt{3},\sqrt{3})$, $x_1 = (-\sqrt{3},-\sqrt{3})$ b) $x_0 = (4/5, 2/5)$
c) $x_{1,2} = \pm(0,1,2)$ (lokale Minima); $x \in E := \{(x,y,z) | 2x^2+5z^2 = 5, y = -2z\}$ (lokale Maxima)

91. Sei $\Delta := \{(x,y) \in [0,1]^2 \mid y \leq 1-x\}$. Definiere

$$f : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{x}(y^2 - y + \frac{x}{3}).$$

Bestimme die globalen Extrema der Funktion $f_{|\Delta}$.

92. Bestimme die lokalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y \exp\left(\frac{x^2}{2} - xy\right).$$

93. An welchen Stellen x besitzt die Funktion $f : D \to R$ lokale Extrema bzw. Sattelpunkte? Berechne die lokalen Extremwerte.

a) $f(x,y) = xe^y + ye^x \quad D = R^2$ b) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2 \quad D = R^2$
c) $f(x,y) = x\ln(x+y) - y \quad D = \{(x,y) | x+y > 0\}$
d) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-x^2-y^2+1} \quad D = R^2$
e) $f(x,y) = x^4 + \frac{3}{4}y^{8/3} - 4xy - y^2 \quad D = \{(x,y) | y > 0\}$

Lösung: a) Sattelpunkt in $x_0 = (-1,-1)$ b) lokales (sogar globales) Max. in $x_0 = (0,0)$ mit $f(x_0) = 4$ c) Sattelpunkt in $x_0 = (\frac{1}{e}, 0)$
d) lokales (sogar globales) Min. in $x_0 = (0,0)$ mit $f(x_0) = 0$
lokales (sogar globales) Max. in $x_1 = (0,1)$, $x_2 = (0,-1)$ mit $f(x_1) = f(x_2) = 2$
Sattelpunkte in $x_3 = (1,0)$ und $x_4 = (-1,0)$
e) lokales Min. in $x_0 = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ mit $f(x_0) = -8$.

94. Seien X, Y Banachräume. Sei U eine offene Teilmenge von X, und sei V eine offene Teilmenge von Y. Sei $\xi \in U$. Sei $f : U \to V$ eine Bijektion so, daß f in ξ und f^{-1} in $f(\xi)$ differenzierbar ist. Zeige, daß die Abbildung $Df(\xi)$ ein Isomorphismus ist und gilt:

$$Df^{-1}(f(\xi)) = (Df(\xi))^{-1}.$$

95. Definiere

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\exp t, t^2+1, t)$$

und

$$g : (0,\infty) \times (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (z^2 \ln(xy), y \arctan z + x).$$

Zeige, daß f und g differenzierbar sind, und berechne deren Ableitungen. Bestimme daraus mittels der Kettenregel auch die Newton-Ableitung von $g \circ f$.

96. Seien X, Y, Z Banach-Räume. Sei $U \subset X$ offen, und sei $f : U \to Y$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Sei $A \in L(Y, Z)$. Zeige, daß die Funktion $A \circ f$ zweimal differenzierbar ist, und leite eine Formel für $D^2(A \circ f)$ her.

    Hinweis: Zeige zunächst, daß die Abbildung

    $$L(X, Y) \to L(X, Z), T \mapsto A \circ T$$

    linear und stetig, also differenzierbar ist.

97. Seien X, Y Banach-Räume, und sei $U \subset X$ offen und zusammenhängend. Sei $f : U \to Y$ eine zweimal differenzierbare Funktion so, daß $D^2 f = 0$ ist. Zeige, daß ein $A \in L(X, Y)$ und ein $y \in Y$ so existieren, daß $f = A_{|U} + y$ ist.

98. Seien X, Y, Z Banach-Räume, und sei $b : X \times Y \to Z$ eine stetige bilineare Funktion. Zeige, daß b differenzierbar ist und für alle $(x, y), (\xi, \eta) \in X \times Y$ gilt:

    $$Db(x, y)(\xi, \eta) = b(x, \eta) + b(\xi, y).$$

    Wie sehen die höheren Ableitungen von b aus ?

    Hinweis: Nutze aus, daß b nach Übung genau dann stetig ist, wenn es ein $c > 0$ so gibt, daß für alle $(x, y) \in X \times Y$ gilt:

    $$||b(x, y)|| \leq c||x|| \, ||y||.$$

99. Seien X, Y, Z Banachräume. Seien $U \subset X$ offen und $\xi \in U$. Seien $f : U \to Y$ und $g : U \to Z$ Funktionen. Definiere

    $$(f, g) : U \to Y \times Z, x \mapsto (f(x), g(x)).$$

    Zeige, daß (f, g) genau dann differenzierbar in ξ ist, wenn f und g differenzierbar in ξ sind, und gib eine Formel an, wie man im Fall der Differenzierbarkeit $D(f, g)(\xi)$ aus $Df(\xi)$ und $Dg(\xi)$ erhält.

100. Seien I, J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$. Sei $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion derart, daß $\partial_1 f$ existiert und stetig ist. Seien $a, b : I \to J$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeige, daß die Funktion

    $$h : I \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) \, dy$$

    differenzierbar ist, und berechne h'.

101. Man differenziere folgende Parameterintegrale mit Hilfe von Aufgabe 100:

a) $F(x) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan x} \frac{(1+\tan^2 y)e^{x \cdot \tan y}}{\tan y}\, dy$, b) $F(x) = \int\limits_0^x \ln(x^2+y^2)\, dy \quad (x>0)$,

c) $F(x) = \int\limits_2^{\sqrt[5]{x}} \frac{\sqrt{1+xy^5}}{y}\, dy \quad (x>0)$, d) $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{3} \frac{e^{y^2 \sin x}}{y}\, dy \quad (0<x<\pi)$,

e) $F(x) = \int\limits_{\frac{1}{2x}}^{5} (x - \frac{1}{4y})e^{4xy}\, dy \quad (x>0)$, f) $F(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2x}} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy \quad (x>0)$.

Lösungen:

a) $F'(x) = \frac{1}{x}(2e^{x^2} - e^x)$; b) $F'(x) = \frac{\pi}{2} + \ln(2x^2)$;

c) $F'(x) = \frac{1}{5x}\left(2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+32x}\right)$; d) $F'(x) = \frac{\cot x}{2}(e^{9\sin x} - 3e^{\sin^3 x})$;

e) $F'(x) = \frac{e^{20x}}{4x}(20x-1)$; f) $F'(x) = 0$.

Die **Nachholklausur zu Analysis II** findet am Donnerstag, den 12. Oktober 2000, von 10.00 bis 13.00 Uhr statt. Der Ort wird rechtzeitig per Aushang am Schwarzen Brett des Mathematischen Seminars bekanntgegeben.

Voraussetzung zur Teilnahme an der Nachholklausur ist, daß die Anzahl n der sinnvoll bearbeiteten Aufgaben aus den Serien 1 bis 12 mindestens 36 beträgt. Diese Zahl kann nachträglich noch dadurch erreicht werden, daß mindestens $36 - x$ Aufgaben aus den Serien 13 und 14 nachgereicht werden. Dieses hat dann allerdings bis zum Ende des Semesters (d.h. 30. September 2000) im Fach des jeweiligen Übungsleiters im Schrein zu geschehen. Dabei gelten die Aufgaben, die eine Unterteilung in a),b),... besitzen, bereits dann als bearbeitet, wenn mindestens 3 der Teilaufgaben (die man sich dann aussuchen kann) gelöst wurden.