Prof. Dr. W. Bergweiler/L. Rempe Wintersemester 2002/2003

Übungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 12

Aufgabe 1.
Sei $n \in \mathbb{N}$; es bezeichne P_n den Vektorraum der Polynome des Grads höchstens n. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi : P_n \to P_n,\ \phi(p)(x) = xp'(x) - p(x).$$

Man bestimme $\dim(\operatorname{Kern}\phi)$ und $\dim(\operatorname{Bild}\phi)$.

Aufgabe 2.
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme AB und BA.

Aufgabe 3.
Man zeige, daß genau ein $x_0 \in (1, \infty)$ mit $x_0 \ln x_0 = 2$ existiert. Berechnen Sie dieses x_0 numerisch mit dem Newton-Verfahren.
Zusatz. Man zeige, daß das Newton-Verfahren für jeden Startwert $x_1 \in (1, \infty)$ konvergiert.

Aufgabe 4.
Man berechne das Taylorpolynom $T_3(x; \tan, 0)$ und schätze für $|x| < \frac{\pi}{4}$ das Restglied $R_3(x)$ ab. Man zeige etwa, daß für diese x

$$|R_3(x)| \leq \frac{10}{3} x^4$$

oder

$$|R_3(x)| \leq \frac{64}{15} x^5$$

gilt.

Aufgabe 5.
Man berechne die Taylorreihe der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

in 0. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

Abgabe: Mittwoch, den 5.2.2003 bzw Donnerstag, den 6.2.2003, in den Übungen.