Übungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 10

Aufgabe 1.
Man bestimme die Menge aller $c \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ -x_1 - 3x_3 + (c-3)x_4 &= 2c - 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 &= c^2 + 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= c - c^2 + 2 \end{aligned}$$

lösbar ist.

Aufgabe 2.
Welche der folgenden Funktionen sind lineare Abbildungen zwischen den Vektorräumen $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

a) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \mapsto f \circ \exp$

b) $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f \mapsto \exp \circ f$.

Aufgabe 3.
Man bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(\sqrt{e^x + 1} + 1\right)$

b) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (1 + x^2)(\arctan x)^3$

c) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \tan(\sin(\cos x))$

Aufgabe 4.
Es seien $\alpha, \beta > 0$. Man bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = (x^\alpha + 1)^\beta$, wobei $\alpha, \beta > 0$.

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^x$

c) $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1 - x}}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\arctan(e^x + x)}{e^x + 1}$

Aufgabe 5.
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \exp(x) + x$$

bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Man bestimme $(f^{-1})'(1)$.

Abgabe: Mittwoch, den 22.1.2003 bzw Donnerstag, den 23.1.2003, in den Übungen.