Übungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 7

Aufgabe 1.
Gegeben sind die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$: $v_1 := (2,1,2,3)$, $v_2 := (2,-2,-4,4)$, $w_1 := (1,2,-1,2)$, $w_2 := (7,-10,15,8)$ und $w_3 := (4,-4,7,5)$.
Es sei $S := \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ und $T := \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3)$. Man bestimme eine Basis von $S + T$ und berechne $\dim(S \cap T)$.

Aufgabe 2.
Es seien U, V und W 3-dimensionale Teilräume des $\mathbb{R}^4$. Welche Dimension haben $U \cap V$ und $U \cap V \cap W$ mindestens?

Aufgabe 3.

Sei (x_n) eine reelle Zahlenfolge mit $x_n \to \infty$ und sei $M \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß gilt:

a) $\frac{\exp(x_n)}{x_n^M} \to \infty$.

b) $\exp(-x_n) \to 0$.

Aufgabe 4.
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, daß die folgenden Gleichungen gelten:

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

b) $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$.

c) $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$.

Aufgabe 5.
Für eine reelle Zahl x bezeichne $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$.
Man bestimme die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \left\lfloor x^2 \right\rfloor - \lfloor x \rfloor^2$$

stetig ist.

Abgabe: Mittwoch, den 11.12.2002 bzw Donnerstag, den 12.12.2002, in den Übungen.