Übungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 2

Aufgabe 1.
Seien $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

$$v_1 \in \operatorname{Span}(v_2, \dots, v_r) \iff \operatorname{Span}(v_1, v_2, \dots, v_r) = \operatorname{Span}(v_2, \dots, v_r).$$

Aufgabe 2.
Gegeben seien die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^5$: $v_1 = \left(\frac{7}{2}, -5, 10, -10, \frac{1}{2}\right)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4, 1)$, $w_1 = (-2, 3, -6, 6, 0)$, $w_2 = (0, 4, -8, 8, 8)$, $w_3 = (1, -1, 2, -2, 1)$.

a) Zeigen Sie, daß $\operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3) = \operatorname{Span}(w_1, w_3)$.

b) Für welche der Vektoren v_k ist $v_k \in \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3)$?

Aufgabe 3.
Es seien A und B nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Sei $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

b) Formulieren und beweisen Sie eine entsprechende Aussage für die (analog definierte) Menge $A - B$.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2.$$

Aufgabe 5.
Der Satz des Archimedes besagt, daß die natürlichen Zahlen als Teilmenge des vollständig geordneten Körpers $\mathbb{R}$ unbeschränkt sind. Zeigen Sie, daß diese Aussage falsch ist, wenn $\mathbb{R}$ durch den geordneten Körper der rationalen Funktionen ersetzt wird. (Siehe Aufgabe 5 des letzten Übungsblattes.)

Abgabe: Mittwoch, den 6.11.2002 bzw Donnerstag, den 7.11.2002, in den Übungen.