Übungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 1

Aufgabe 1.
Definiere $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{2, 3, 4\}$ und $C := \{3, 4, 5\}$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $(A \times B) \cap C^2$

b) $(A \times B) \setminus (B \times A)$

c) $(A \cup B)^2 \setminus \big((A \times B) \cup (B \times A)\big)$

Aufgabe 2.
Sei K ein beliebiger Körper und seien $a, b \in K$. Zeigen Sie:

a) $(-1) \cdot a = -a$,

b) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$,

c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie, daß die Menge $\{a + \sqrt{2}b : a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation ein Körper ist.

Aufgabe 4.
Seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$. Zeigen Sie, daß die "umgekehrte Dreiecksungleichung" gilt:

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

Aufgabe 5*.
Zur Erinnerung: Eine Funktion p der Form $p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ heißt *Polynom.* Sind p, q Polynome, $q \neq 0$, so nennt man $f(x) := p(x)/q(x)$ eine *rationale Funktion.* Jedes Polynom $p \neq 0$ hat nur endlich viele Nullstellen, damit besitzt jede rationale Funktion $f \neq 0$ ebenfalls nur endlich viele Null- und Polstellen. Die Menge der rationalen Funktionen ist (mit der gewöhnlichen punktweisen Addition und Multiplikation) ein Körper.
Wir definieren auf den rationalen Funktionen eine Relation $<$ wie folgt. Sei zunächst $f \neq 0$ eine beliebige rationale Funktion, und sei x_0 derart, daß f für $x < x_0$ keine Null- oder Polstellen hat. Wir definieren $f < 0$, falls $f(x) < 0$ für alle $x < x_0$ gilt. Sind f und g zwei rationale Funktionen, so definieren wir

$$f < g \iff f - g < 0.$$

Zeigen Sie: Diese Relation erfüllt die Ordnungsaxiome. (D.h., die Menge aller rationalen Funktionen ist mit dieser Ordnung ein geordneter Körper.)

Abgabe: Mittwoch, den 30.10.2002 bzw Donnerstag, den 31.10.2002, in den Übungen.

Literatur

- M. Barner und F. Flohr, *Analysis I*, de Gruyter
- C. Blatter, *Analysis I*, Springer Verlag, Heidelberger TB
- O. Forster, *Analysis I*, Vieweg
- H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis I*, Teubner
- K. Königsberger, *Analysis I*, Springer
- W. Walter, *Analysis I*, Springer
- G. Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg
- M. Koecher, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Springer
- H.-J. Kowalski, G. Michler, *Lineare Algebra*, de Gruyter
- F. Lorenz, *Lineare Algebra*, BI Wissenschaftsverlag
- H. Fischer, H. Kaul, *Mathematik für Physiker*