Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 8

Aufgabe 1.

Es seien $v_1 := (1,2,3,2,1), v_2 := (3,6,9,-4,8), v_3 := (-1,0,1,-2,3)$ und $v_4 := (3,2,1,0,0)$.

Behauptung. Die Vektoren $(1,2,3,2,1), (0,1,2,0,2), (0,0,0,-2,1), (0,0,0,0,2)$ bilden eine Basis von $\mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Beweis. Definiere

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

es gilt dann $\mathrm{ZRaum}(A) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens überführen wir A mit Hilfe von elementaren Zeilenumformumgen in Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -4 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: B.$$

Nach Vorlesung gilt $\mathrm{ZRaum}(A) = \mathrm{ZRaum}(B)$. Ferner ist B in Zeilenstufenform; daher bilden die Zeilenvektoren von B nach Vorlesung eine Basis von $\mathrm{ZRaum}(B) = \mathrm{ZRaum}(A) = \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Aufgabe 2.
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 8 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Behauptung. Es gilt $\mathrm{ZRang}(A) = 4$.

Beweisskizze. Wie in Aufgabe 1 überführt man mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Matrix A in eine Zeilenstufenmatrix B; nach Vorlesung ist dann $\mathrm{ZRang}(A) = \mathrm{ZRang}(B)$. Der Zeilenrang von B ist nach Vorlesung gleich der Anzahl der Zeilen von B, die nicht konstant 0 sind.

Aufgabe 3.

Behauptung. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto e^x + x^2$$

besitzt ein Minimum.

Beweis. Die Funktionen exp und $x \mapsto x^2$ sind nach Vorlesung stetig. Die Funktion f ist also als Summe stetiger Funktionen selbst stetig. Daher besitzt sie im Intervall $[-1, 1]$ ein Minimum; d.h. es existiert $x_0 \in [-1, 1]$ mit $m := f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$. Wir behaupten, daß $m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)$. Sei also $x \in \mathbb{R}$.

Fall 1. $|x| \leq 1$. Dann gilt $x \in [-1, 1]$, also $f(x) \geq m$ nach Wahl von m.

Fall 2. $|x| > 1$. Dann gilt $f(x) = e^x + x^2 > x^2 > 1 = f(0) \geq m$.

Aufgabe 4.

Behauptung. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x + \cos x$$

besitzt mindestens eine Nullstelle.

Beweis. Die Funktionen cos und $x \mapsto x$ sind stetig; daher ist f als Summe zweier stetiger Funktionen selbst stetig. Es gilt

$$f(0) = 0 + \cos 0 = 1 > 0$$

und, wegen $\cos(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-1) = -1 + \cos(-1) \leq -1 + 1 = 0.$$

Nach Zwischenwertsatz existiert daher $x_0 \in [-1, 0]$ mit $f(x_0) = 0$.

Aufgabe 5.
Seien $a < b < c$, und seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [b,c] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir definieren

$$h : [a,c] \to \mathbb{R}, h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in [a,b] \\ g(x) & x \in (b,c]. \end{cases}$$

Behauptung h ist genau dann stetig, wenn $f(b) = g(b)$ gilt.

Beweis.

"$\Rightarrow$" Es sei h stetig; dann ist h insbesondere stetig in b. Wir definieren eine Folge (x_n) durch

$$x_n := b + \frac{c-b}{n}.$$

Dann ist $x_n \in (b,c]$; und es gilt $x_n \to b$.

Da g stetig in b ist, gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(b).$$

Andererseits gilt, da h stetig in b ist:

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(b) = f(b).$$

Also $f(b) = g(b)$.

"$\Leftarrow$" Wir zeigen zunächst, daß h stets in $[a,b)$ stetig ist. Sei dazu $x_0 \in [a,b)$ beliebig, und sei (x_n) eine beliebige Folge in $[a,c]$ mit $x_n \to x_0$. Dann existiert n_0 derart, daß $|x_n - x_0| < b - a$ für alle $n \geq n_0$; also insbesondere $x_n \in [a,b)$ für $n \geq n_0$. Es ist also $(x_n)_{n \geq n_0}$ eine Folge in $[a,b)$ mit Grenzwert x_0. Da f stetig in x_0 ist, konvergiert die Folge $(f(x_n))_{n\geq n_0} = (h(x_n))_{n \geq n_0}$ gegen $f(x_0) = h(x_0)$. Analog folgt, daß h stetig in $(b,c]$ ist.

Es gelte nun $f(b) = g(b)$. Es ist zu zeigen, daß h stetig in b ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig in b ist, existiert $\delta_1 > 0$ mit $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ falls $x \in [a,b]$, $|x - b| < \delta_1$. Entsprechend existiert $\delta_2 > 0$ derart, daß $|g(x) - g(b)| < \varepsilon$ falls $x \in [b,c]$, $|x - b| < \delta_2$. Wir setzen $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$.

Sei $x \in [a,c]$ mit $|x - b| < \delta$.

Fall 1. $x \leq b$. Dann ist $x \in [a,b]$ und $|x - b| < \delta \leq \delta_1$. Also gilt

$$|h(x) - h(b)| = |f(x) - f(b)| < \varepsilon.$$

Fall 2. $x > b$. Dann ist $x \in (b,c]$ und $|x - b| < \delta \leq \delta_2$, also

$$|h(x) - h(b)| = |g(x) - f(b)| = |g(x) - g(b)| < \varepsilon.$$