Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 7

Aufgabe 1.

Es seien $v_1 := (2,1,2,3), v_2 := (2,-2,-4,4), w_1 := (1,2,-1,2)$, $w_2 := (7,-10,15,8)$ und $w_3 := (4,-4,7,5)$. Es sei $S := \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ und $T := \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3)$.

Behauptung. Die Vektoren v_1, v_2 und w_1 bilden eine Basis von $S+T$. Die Dimension von $S \cap T$ ist 1.

Beweis. Es sind offensichtlich v_1 und v_2 linear unabhängig, also ist $\dim S = 2$. Ferner sind w_1 und w_3 linear unabhängig und

$$w_2 = 2w_3 - w_1 \in \mathrm{Span}(w_1, w_3),$$

also ist $T = \mathrm{Span}(w_1, w_3)$ und $\dim T = 2$.
Außerdem gilt

$$w_3 = 3v_1 + \frac{1}{2}v_2 - 3w_1,$$

also ist $S+T = \mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1)$. Wir beweisen nun, daß v_1, v_2, w_1 linear unabhängig sind; seien also $\lambda, \nu, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu w_1 = 0$. Dann sind insbesondere die ersten drei Komponenten dieser Vektoren gleich, also

$$\begin{aligned} 2\lambda + 2\mu + \nu &= 0, \\ \lambda - 2\mu + 2\nu &= 0 \text{ und} \\ 2\lambda - 4\mu - \nu &= 0. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$0 = (2\lambda + 2\mu + \nu) + (2\lambda - 4\mu - \nu) = 4\lambda - 2\mu,$$

also $\mu = 2\lambda$. Ferner gilt dann

$$0 = 2(2\lambda + 2\mu + \nu) - (\lambda - 2\mu + 2\nu) = 3\lambda + 2\mu = 7\lambda,$$

also $\lambda = 0$ und damit auch $\mu = 0$. Offensichtlich muß dann auch $\nu = 0$ gelten.
Damit sind v_1, v_2 und w_1 linear unabhängig und bilden damit eine Basis von $\mathrm{Span}(v_1, v_2, w_1) = S+T$.
Schließlich gilt nach der Dimensionsformel (Satz 3.5.5 der Vorlesung):

$$3 = \dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - \dim(S \cap T),$$

also $\dim(S \cap T) = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe 2.

Es seien U, V und W 3-dimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^4$.

Behauptung. Die Dimension von $U \cap V$ ist mindestens 2, und die Dimension von $U \cap V \cap W$ ist mindestens 1.

Beweis. Es gilt $\dim(U+V) \leq 4$, also

$$\dim U \cap V = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3 + 3 - \dim(U+V) \geq 6 - 4 = 2.$$

Genauso ist $\dim((U \cap V) + W) \leq 4$, also

$$\dim((U \cap V \cap W) = \dim(U \cap V) + \dim(W) - \dim((U \cap V) + W) \geq 2 + 3 - 4 = 1.$$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, daß diese Werte angenommen werden, wenn U, V, W so gewählt werden, daß $U + V = (U \cap V) + W = \mathbb{R}^4$ gilt.

Aufgabe 3.

Es sei (x_n) eine reelle Zahlenfolge mit $x_n \to \infty$, und sei $M \in \mathbb{N}$.

BEHAUPTUNG.

a) Es gilt $\dfrac{\exp(x_n)}{x_n^M} \to \infty$.

b) Es gilt $\exp(-x_n) \to 0$.

BEWEIS.

a) OBdA gelte $x_n > 0$ für alle n. Es gilt

$$\exp(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_n^k}{k!} \geq \frac{x_n^{M+1}}{(M+1)!},$$

also

$$\frac{\exp(x_n)}{x_n^M} \geq \frac{x_n^{M+1}}{x_n^M \cdot (M+1)!} = \frac{x_n}{(M+1)!} \to \infty.$$

b) Nach Teil 1 gilt insbesondere $\exp(x_n) \to \infty$; nach Vorlesung gilt daher

$$\exp(-x_n) = \frac{1}{\exp(x_n)} \to 0.$$

Aufgabe 4. Sei $x \in \mathbb{R}$.

BEHAUPTUNG. Es gelten die folgenden Gleichungen.

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

b) $\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$.

c) $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$.

BEWEIS.

a) Es gilt nach den Additionstheoremen:

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) \\ &= (2\sin x \cos x)\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x = 3\sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\ &= 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = -\cos(x).$$

c) Nach b) gilt

$$\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}.$$

Aufgabe 5. Für eine reelle Zahl x bezeichne $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq x$. Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; c \mapsto \lfloor x^2 \rfloor - \lfloor x \rfloor^2$$

und

$$M := \{x \in \mathbb{R} : f \text{ ist stetig in } x$$

Behauptung Es gilt

$$M = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x^2 \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis.

"$\supset$" Zu zeigen ist $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \notin \mathbb{N}\} \subset M$ und $1 \in M$.

Sei also zunächst $x_0^2 \notin \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen $x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ und $x \mapsto \lfloor x \rfloor^2$ stetig in x_0, also ist auch f als Differenz dieser beiden Funktionen stetig in x_0.

Wir zeigen nun, daß $1 \in M$. Sei dazu $\varepsilon > 0$, und setze $\delta := \sqrt{2} - 1$. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 1| < \delta$.

1. Fall: $x \geq 1$. Dann ist $1 \leq x < \sqrt{2}$, also $\lfloor x^2 \rfloor = 1 = \lfloor x \rfloor^2$, also $f(x) = 0$ und daher

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

2. Fall: $x < 1$. Dann ist $0 < x < 1$, also $\lfloor x^2 \rfloor = 0 = \lfloor x \rfloor^2$, und wiederum

$$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| < \varepsilon.$$

"$\subset$" Durch Kontraposition. Sei also $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $x_0^2 \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, daß f in x_0 unstetig ist.

1. Fall: $x_0 \notin \mathbb{Z}$. Dann ist die Funktion $x \mapsto \lfloor x \rfloor^2$ stetig in x_0, aber die Funktion $x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$ ist unstetig in x_0. Daher ist auch f unstetig in x_0.

2. Fall: $x_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Definiere

$$x_n := x_0 - \frac{1}{n}.$$

Dann gilt $x_n \to x_0$. Insbesondere existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > \sqrt{x_0^2 - 1}$ für $n \geq n_0$. Dann gilt für $n \geq n_0$:

$$\lfloor x_n^2 \rfloor = x_0^2 - 1$$

und

$$\lfloor x_n \rfloor^2 = (x_0 - 1)^2 = x_0^2 - 2x_0 + 1;$$

d.h.

$$f(x_n) = x_0^2 - 1 - x_0^2 + 2x_0 - 1 = 2x_0 - 2.$$

Insbesondere gilt

$$f(x_n) \to 2x_0 - 2 \neq 0 = f(x_0),$$

da $x_0 \neq 1$.