Wintersemester 2002/2003

Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 6

Aufgabe 1.

Es seien $v_1 := (1,2,3), v_2 := (2,1,-2), v_3 := (1,1,-2)$ und $w := (1,3,8)$.
Behauptung. Sowohl v_1, v_2, w als auch v_2, v_3, w sind Basen des $\mathbb{R}^3$. v_1, w, v_2 ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Beweis. Wir zeigen zunächst, daß v_1, v_2, v_3 Basis des $\mathbb{R}^3$ ist. Da $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ genügt es nach Vorlesung zu zeigen, daß die drei Vektoren linear unabhängig sind.
Seien also $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 = 0$, also

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu + \nu &= 0, \\ 2\lambda + \mu + \nu &= 0 \text{ und} \\ 3\lambda - 2\mu - 2\nu &= 0. \end{aligned}$$

Zu zeigen ist, daß $\lambda = \mu = \nu = 0$ gilt. Aus der ersten Gleichung folgt

$$\nu = -\lambda - 2\mu;$$

also

$$0 = 2\lambda + \mu + \nu = 2\lambda + \mu - \lambda - 2\mu = \lambda - \mu,$$

d.h. $\lambda = \mu$, und insbesondere $\nu = -3\mu$. Setzen wir dies in die dritte Gleichung ein, erhalten wir

$$0 = 3\mu - 2\mu - 6\mu = -5\mu;$$

also $\mu = \lambda = \nu = 0$.
Weiterhin gilt $w = 2v_1 - v_3$. Nach Satz 3.4.5. der Vorlesung folgt, daß w, v_1, v_2 und w, v_1, v_3 Basen von $\mathbb{R}^3$ ist. Offensichtlich sind v_1, v_3, w linear abhängig, also keine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 2.

Es seien $v_1 := (1,2,3,4), v_2 := (2,1,-2,1), v_3 := (1,1,-2,1)$.
Behauptung. v_1, v_2, v_3 und $v_4 := (1,2,3,0)$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.

Beweis. Zunächst sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig. Denn sind $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$, so gilt insbesondere

$$\lambda(1,2,3) + \mu(2,1,-2) + \nu(1,1,-2) = 0.$$

Nach dem Beweis von Aufgabe 1 ist dann $\lambda = \mu = \nu$.
Es genügt daher zu zeigen, daß $v_4 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$. Wir nehmen also an, es existieren $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit

$$v_4 = \lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3.$$

Dann ist insbesondere

$$(1,2,3) = \lambda(1,2,3) + \mu(2,1,-2) + \nu(1,1,-2).$$

Da diese drei Vektoren linear unabhängig sind, gibt es genau eine Lösung dieser Gleichung, und diese ist gegeben durch $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$. Also gilt $v_4 = v_1$. Widerspruch.

Aufgabe 3.

Für $n \geq 1$ definieren wir

$$a_n := \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}, \; b_n := \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^3} \quad \text{und } c_n := \frac{(n!)^2(1+2i)^n}{(2n)!}.$$

Behauptung. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sind absolut konvergent.

Beweis. Es gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{1}{n+1}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ nicht konvergiert, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nach Vergleichskriterium auch nicht.
Um zu zeigen, daß $\sum a_n$ konvergent ist, genügt es nach Leibnizkriterium zu zeigen, daß die Folge $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ monoton fallend und gegen 0 konvergent ist, wobei letzteres wegen

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$$

offensichtlich ist.
Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left(\frac{a_{n+1}}{an}\right)^2 = \frac{(n+1)^3}{n \cdot (n+2)^2} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^2+4n} < 1,$$

also $|a_{n+1}| < |a_n|$; d.h. die Folge ist monoton fallend.
Um zu zeigen, daß die Reihe $\sum b_n$ absolut konvergent ist, verwenden wir das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{b_n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}.$$

Dies ist eine Teilfolge der Folge $(1-\frac{1}{n})^n$, die nach Vorlesung gegen $\exp(-1) = \frac{1}{e}$ konvergiert. Daher konvergiert auch $\sqrt[n]{|b_n|}$ gegen $\frac{1}{e} < 1$. Nach Wurzelkriterium ist die Reihe daher absolut konvergent.
Auf die Reihe $\sum c_n$ wenden wir schließlich das Quotientenkriterium an. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{((n+1)!)^2 \cdot (1+2i)^{n+1} \cdot (2n)!}{(2(n+1))! \cdot (n!)^2 \cdot (1+2i)^n} \\ &= \frac{(n+1)^2 \cdot (1+2i)}{(2n+1)(2n+2)} = (1+2i)\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = (1+2i)\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}. \end{aligned}$$

Dies Folge konvergiert nach den Rechenregeln für Grenzwerte gegen $\frac{1+2i}{4}$. Es gilt

$$\left|\frac{1+2i}{4}\right| \leq \frac{3}{4} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe.

Aufgabe 4.
Sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge die unendlich viele positive und unendlich viele negative Glieder besitzt; sei (a_{ν_k}) die Teilfolge der positiven und (a_{μ_k}) die Teilfolge der negativen Folgenglieder.

BEHAUPTUNG. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent genau dann, wenn die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu_k}$ konvergieren.

BEWEIS. "$\Longleftarrow$": Es gelte: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent; d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ist konvergent. Dann gilt für jedes $k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{k_0} |a_{\nu_k}| \leq \sum_{n=0}^{\nu_{k_0}} |a_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Nach Satz 5.2.1 ist also $\sum a_{\nu_k}$ absolut konvergent. Analog folgt die Konvergenz von a_{μ_k}.
"$\Longrightarrow$": Es gelte: die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu_k}$ konvergieren; seien ihre Summen mit A und B bezeichnet. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Es sei $k_1 := \min\{k : \nu_{k+1} > n_0\}$ und $k_2 := \min\{k : \mu_{k+1} > n_0\}$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{n_0} |a_n| = \left(\sum_{n \leq n_0 : a_n > 0} a_n \right) - \left(\sum_{n : a_n < 0} a_n \right) = \sum_{k=0}^{k_1} a_{\nu_k} + \sum_{k=0}^{k_2} a_{\mu_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_{\nu_k} - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu_k} = A - B.$$

Nach Satz 5.2.1. folgt wiederum, daß $\sum a_n$ absolut konvergent ist.

Aufgabe 5.

a) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und (b_n) eine beschränkte Folge.

BEHAUPTUNG. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ konvergiert absolut.

BEWEIS. Sei $B > 0$ mit $|b_n| < B$ für alle n. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} B|a_n|$ ist nach Vorlesung konvergent. Wegen
$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < B|a_n|$$
ist dann nach Vergleichskriterium auch $\sum |a_n \cdot b_n|$ konvergent.

b) BEHAUPTUNG. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + e^2 n - 7}{(2n-1)(2n+1)2^n}$$

ist absolut konvergent.

BEWEIS. Die geometrische Reihe $\sum \frac{1}{2^n}$ ist konvergent. Ferner ist die Folge

$$\frac{n^2 + e^2 n - 7}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1 + \frac{e^2}{n} - \frac{7}{n^2}}{4 - \frac{1}{n^2}}$$

nach den Rechenregeln für Grenzwerte konvergent (gegen $\frac{1}{4}$); insbesondere ist sie beschränkt. Nach Teil a) ist die Reihe also absolut konvergent.