Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 5

Aufgabe 1.

Behauptung. Die drei Vektoren $v_1 := (1,2,3,4), v_2 := (1,-1,-3,4), v_3 := (2,-3,-8,5)$ sind linear unabhängig.

Beweis. Seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0$. Es ist zu zeigen, daß $\lambda = \mu = \nu = 0$. Es gelten die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda + \mu + 2\nu &= 0 \\ 2\lambda - \mu - 3\nu &= 0 \\ 3\lambda - 3\mu - 8\nu &= 0 \\ 4\lambda + 4\mu + 5\nu &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda + \mu = -2\nu$; also gilt nach der vierten Gleichung

$$0 = 4(\lambda + \mu) + 5\nu = -8\nu + 5\nu = -3\nu,$$

also $\nu = 0$. Ferner ist dann auch

$$0 = \lambda + \mu + 2\nu = \lambda + \mu,$$

d.h. $\lambda = -\mu$. Nach der zweiten Gleichung ist also

$$0 = 2\lambda - \mu = 3\lambda,$$

also $\lambda = 0$ und daher auch $\mu = -\lambda = 0$.

Aufgabe 2.

Es sei V die Menge aller Polynome p vom Grad höchstens 3 mit $p(1) = p(2) = 0$. Nach Serie 4, Aufgabe 1 ist V ein Teilraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
BEHAUPTUNG. Die Polynome $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3x + 2$ und $p_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x$ bilden eine Basis von V.
BEWEIS. Es ist zu zeigen:

a) p_1 und p_2 sind linear unabhängig.

b) $\mathrm{Span}(p_1, p_2) = V$.

Zu a). Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda p_1 + \mu p_2 = 0$. Dann gilt insbesondere

$$0 = (\lambda p_1 + \mu p_2)(0) = \lambda p_1(0) + \mu p_2(0) = 2\lambda,$$

also $\lambda = 0$, und (wegen $p_2 \neq 0$) auch $\mu = 0$. Also sind p_1 und p_2 linear unabhängig.
Zu b). Sei $p \in V$, etwa $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= p(1) = a + b + c + d \text{ und} \\ 0 &= p(2) = 8a + 4b + 2c + d. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß $p = av_2 + \frac{d}{2}v_1$ gilt. Es ist

$$2c = 4c - 2c = 4(-a - b - d) - (-8a - 4b - d) = 4a - 3d,$$

also $c = 2a - \frac{3}{2}d$. Ferner ist daher

$$b = -a - c - d = -a - d - 2a + \frac{3}{2}d = \frac{1}{2}d - 3a.$$

Insgesamt gilt also für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d &= ax^3 + (-3a + \frac{1}{2}d)x^2 + (2a - \frac{3}{2}d)x + dx \\ &= ax^3 - 3ax^2 + 2a + \frac{d}{2}x^2 + 3\frac{d}{2}x + 2\frac{d}{2} = av_2 + \frac{d}{2}v_1. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

Lemma. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente positive Zahlenfolge mit $\lim_{n\to\infty} a_n > 1$, so ist die Folge $((a_n)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneigentlich konvergent gegen ∞.
Beweis. Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Sei $B > 1$ mit $1 < B < a$. Dann existiert $n > 0$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < a - B$; insbesondere ist dann für diese n:

$$a_n = a - (a - a_n) > a - (a - B) = B.$$

Folglich gilt für $n \geq n_0$: $a_n^n > B^n$. Wegen $B^n \to \infty$ gilt dann auch $a_n^n \to \infty$.

Es sei nun $b \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$.

BEHAUPTUNG. Es gilt

$$\frac{a^n}{n^b} \to \infty.$$

BEWEIS. Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt nach den in der Vorlesung bewiesenen Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^b}} = \frac{a}{\sqrt[n]{n^b}} = \frac{a}{(\sqrt[n]{n})^b} \to a.$$

Nach dem Lemma folgt die Behauptung.

Aufgabe 4. Es sei (a_n) eine beschränkte (reelle) Zahlenfolge derart, daß die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ kein Maximum besitzt. Sei $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. BEHAUPTUNG. Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to a$.
BEWEIS. Wir behaupten zunächst, daß für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ und alle $\delta > 0$ die Menge

$$M_{n_0,\delta} := \{n > n_0 : (a - a_n) < \delta\}$$

nicht leer ist.
Beweis dieser Behauptung. Definiere

$$\varepsilon := \min\{\delta, a - a_1, a - a_2, \dots, a - a_{n_0}\}.$$

Dann ist nach Voraussetzung $\varepsilon > 0$. Es existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a - a_n < \varepsilon.$$

Für $1 \le j \le n_0$ gilt dann $a - a_n < \varepsilon \le a - a_j$; also insbesondere $n \ne j$. Daher gilt $n > n_0$. Ferner ist natürlich $a - a_n < \varepsilon \le \delta$, also insgesamt $n \in M_{n_0,\delta}$.

Wir konstruieren nun eine Folge (n_k) induktiv wie folgt. Es sei $n_0 := 1$ und, für $k \ge 0$,

$$n_{k+1} := \min M_{n_k, \frac{1}{k+1}}.$$

Nach Definition von $M_{n_k,\frac{1}{k}}$ ist (n_k) streng monoton steigend, und es gilt für $k \ge 1$:

$$|a_{n_k} - a| = a - a_{n_k} < \frac{1}{k} \to 0;$$

also $a_{n_k} \to a$.

Aufgabe 5.
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.
BEHAUPTUNG. Es gilt

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 + |z - w|^2 &= (z + w) \cdot \overline{(z + w)} + (z - w) \cdot \overline{(z - w)} \\
&= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) + (z - w)(\overline{z} - \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\
&= 2(z\overline{z} + w\overline{w}) = 2(|z|^2 + |w|^2).
\end{aligned}$$

Diese Gleichung heißt Parallelogrammidentität, da $|z + w|$ und $|z - w|$ die Längen der Diagonalen eines von z und w aufgespannten Parallelogramms sind.