Aufgabe 1. Definiere $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} T_1 &:= \{f \in V : \; f(1) = f(2) = 0\}, \\ T_2 &:= \{f \in V : \; f(1) \cdot f(2) = 0\}, \\ T_3 &:= \{f \in V : \; f(1) + f(2) = 0\}. \end{aligned}$$

Behauptung. T_1 und T_3 sind Teilräume von V. T_2 ist kein Teilraum von V.

Beweis. Offenbar ist die Nullabbildung, d.h. die Abbildung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 0$, in T_1 enthalten. Somit ist $T_1 \neq \emptyset$. Seien $f, g \in T_1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $(f+g)(1) = f(1)+g(1) = 0 + 0 = 0$ und $(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 0 + 0 = 0$. Also ist $f + g \in T_1$. Ferner gilt $(\lambda f)(1) = \lambda f(1) = \lambda 0 = 0$ und $(\lambda f)(2) = \lambda f(2) = \lambda 0 = 0$. Also gilt $\lambda f \in T_1$. Nach dem Teilraumkriterium ist somit T_1 ein Teilraum von V.

In T_3 ist die Nullabbildung offenbar auch enthalten. Seien jetzt $f, g \in T_3$ und wieder $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(f+g)(1) + (f+g)(2) = f(1) + g(1) + f(2) + g(2) = \underbrace{f(1) + f(2)}_{=0} + \underbrace{g(1) + g(2)}_{=0} = 0,$$

also $f+g \in T_3$. Ferner ist $(\lambda f)(1)+(\lambda f)(2) = \lambda f(1)+\lambda f(2) = \lambda(f(1)+f(2)) = \lambda \cdot 0 = 0$. Also ist $\lambda f \in T_3$. Nach dem Teilraumkriterium ist somit T_3 ein Teilraum von V.

Um einzusehen, daß T_2 kein Teilraum von V ist, definiere

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $f(1)f(2) = 1 \cdot 0 = 0$, also $f \in T_2$, und $g(1)g(2) = 0 \cdot 2 = 0$, also $g \in T_2$. Aber es ist $(f+g)(1)(f+g)(2) = (f(1)+g(1))(f(2)+g(2)) = (1+0)(0+1) = 1$, also $f + g \notin T_2$. Somit ist T_2 kein Teilraum von V. ■

Aufgabe 2. Definiere $v_1 := (1,2,3)$, $v_2 := (3,2,1)$, $v_3 := (1,2,4)$ und $v_4 := (1,1,0)$, sowie $W_1 := \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ und $W_2 := \operatorname{Span}(v_3, v_4)$.

Behauptung. Es gilt

(a) $W_1 \cap W_2 = \operatorname{Span}(5v_1 + v_2) = \operatorname{Span}(\,(8,12,16)\,) = \operatorname{Span}(\,(2,3,4)\,)$ und

(b) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$.

Beweis. Zu Teil (a). Die zweite und dritte Gleichung sind klar, wir beweisen die erste (wie immer) durch Nachweis beider Inklusionen.

„$\subset$": Sei $v \in W_1 \cap W_2$. Dann findet man $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ so, daß gilt $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ und $v = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$.

Es folgt $0 = v - v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - \lambda_3 v_3 - \lambda_4 v_4$, und durch Betrachtung der Komponenten von $v_1 \ldots v_4$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 && (1)\\ 0 &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 && (2)\\ 0 &= 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 && (3) \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 - 0 \overset{(1)}{=} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - 0\\ &\overset{(2)}{=} \lambda_1 + 3\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 - (2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4) && (4)\\ &= -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 4\cdot 0 \overset{(3)}{=} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + 4\cdot 0\\ &\overset{(4)}{=} 3\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 + 4(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\\ &= -\lambda_1 + 5\lambda_2. \end{aligned}$$

Aus letzterem folgt $\lambda_1 = 5\lambda_2$. Die schon bekannte Darstellung von v als Linearkombination von v_1 und v_2 liefert uns jetzt

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 5\lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_2(5v_1 + v_2),$$

also $v \in \operatorname{Span}(5v_1 + v_2)$.

„$\supset$": Sei $v \in \operatorname{Span}(5v_1 + v_2)$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $v = \lambda(5v_1 + v_2)$ $(\,= \lambda(8,12,16)\,)$ gilt, somit $v = (5\lambda)v_1 + \lambda v_2$. Wir sehen, daß $v \in \operatorname{Span}(v_1, v_2)$, also $v \in W_1$, gilt.

Definiere jetzt $\alpha := \beta := 4\lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha v_3 + \beta v_4 &= \lambda(4v_3 + 4v_4)\\ &= \lambda(\,(4,8,16) + (4,4,0)\,)\\ &= \lambda(8,12,16)\\ &= v, \end{aligned}$$

also $v \in \mathrm{Span}(v_3, v_4) = W_2$.

Zu Teil (b). Die Inklusion „$\subset$" ist klar. Um die andere nachzuweisen sei $v \in \mathbb{R}^3$. Dann gibt es $x, y, z \in \mathbb{R}$ so, daß $v = (x, y, z)$ gilt. Definiere $\alpha := 4(y - x) - z$, $\beta := 3(x - y) + z$ und $\gamma := 2x - y$. Eine einfache Rechnung liefert $\alpha v_1 + \beta v_3 + \gamma v_4 = v$. Da $\alpha v_1 \in W_1$ und $\beta v_3 + \gamma v_4 \in W_2$ gilt, folgt $v \in W_1 + W_2$. ■

Aufgabe 3. Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n &:= \frac{n^2 + 7\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 5} \\ b_n &:= \frac{7n^3 + 5n + 2e\sqrt[n]{n}}{n(n^2+1)} \\ c_n &:= \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt[n]{5} + 4n}{2n - 3n^2} \end{aligned}$$

Behauptung. (a) Es divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞.

(b) Es konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 7.

(c) Es konvergiert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

Beweis. Zu (a). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{n^2 + 7\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 5} = \frac{\frac{n^2}{\sqrt{n}} + 7}{1 + \frac{5}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{\sqrt{n}}}(\sqrt{n}n + 7).$$

Wegen $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ gilt $\frac{5}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Nach dem Satz über die Summe zweier konvergenter Folgen ist deshalb $1 + \frac{5}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, und da dieser Grenzwert ungleich 0 ist, folgt weiter mit dem Satz über den Quotienten konvergenter Folgen, deren Nenner keine Nullfolge ist, daß $\frac{1}{1+\frac{5}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Insbesondere gibt es $c > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß $\frac{1}{1+\frac{5}{\sqrt{n}}} > c$ ist für alle $n \geq n_0$. Ferner ist wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ auch $\sqrt[n]{n} + 7 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Zusammen[1] ergibt das $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Zu (b). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$b_n = \frac{7n^3 + 5n + 2e\sqrt[n]{n}}{n(n^2+1)} = \frac{7n^3 + 5n + 2e\sqrt[n]{n}}{n^3 + n} = \frac{7 + \frac{5}{n^2} + 2e\sqrt[n]{n}\frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Wegen $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt $1+\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Der Nennner unserer Folge konvergiert also gegen einen Grenzwert ungleich Null. Nach Vorlesung gilt $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also $2e\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2e$.

[1] Es ist allgemein so, daß das Produkt einer bestimmt gegen ∞ divergenten Folge und einer, bei der fast alle Glieder größer einer positiven Konstanten sind, wieder bestimmt gegen ∞ divergiert. Den (nicht schwierigen) Nachweis davon hatte ich in meiner Übung schon vorgenommen, allen anderen sei er als Übung angeraten.

Wegen $\frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ folgt $2e\sqrt[n]{n}\frac{1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Mit $7+\frac{5}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 7$ folgt, daß der Zähler gegen 7 konvergiert. Nach dem Satz über den Quotienten konvergenter Folgen, deren Nenner keine Nullfolge ist, folgt die Behauptung.

Zu (c). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}\sqrt[n]{5}+4n}{2n-3n^2} = \frac{n^{-\frac{1}{2}}\sqrt[n]{5}+\frac{4}{n}}{\frac{2}{n}-3}.$$

Wegen $\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ist $\frac{2}{n}-3 \xrightarrow[n\to\infty]{} -3$. Der Nenner konvergiert also gegen einen Grenzwert ungleich Null. Es ist $n^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ und $\sqrt[n]{5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also $n^{-\frac{1}{2}}\sqrt[n]{5} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Da auch noch $\frac{4}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt, folgt mit wieder dem Satz über Quotienten konvergenter Folgen, deren Nenner keine Nullfolge ist, die Behauptung. ■

Aufgabe 4. Definiere $a_1 := 0$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ unter der Voraussetzung, daß a_n schon definiert ist, definiere $a_{n+1} := {a_n}^2 + \frac{1}{4}$. (Dies definiert dann offenbar eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Behauptung. Es konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und zwar gegen $\frac{1}{2}$.

Beweis. Um die Konvergenz einzusehen, zeigen wir, daß die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$a_{n+1} = {a_n}^2 + \frac{1}{4} = {a_n}^2 - 2\frac{1}{2}a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{2}a_n = \underbrace{(a_n - \frac{1}{2})^2}_{\geq 0} + a_n,$$

also $a_{n+1} \geq a_n$. Zur Beschränktheit: Wir beweisen $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ (also insbesondere $a_n \leq \frac{1}{2}$) durch Induktion. Es ist offenbar $a_1 \leq |\frac{1}{2}|$. Ist $|a_n| \leq \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt $|a_{n+1}| = {a_n}^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Als monotone und beschränkte Folge ist a_n konvergent; setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

Sei $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \longmapsto n+1$. Dann ist α streng monoton steigend und somit $\left(a_{\alpha(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die folglich auch den Grenzwert a hat. Es gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{\alpha(n)} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} ({a_n}^2 + \frac{1}{4}).$$

Da sowohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch die konstante Folge $\left(\frac{1}{4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, folgt

$$a = \lim_{n\to\infty} {a_n}^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} = a^2 + \frac{1}{4}.$$

Also $0 = a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$ und damit $a = \frac{1}{2}$. ■

Aufgabe 5. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Sei $\alpha \geq 0$.

Behauptung. Es sind äquivalent:

(a) $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$

(b) $\sqrt[p]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[p]{\alpha}$

Beweis. <u>(a)$\Longrightarrow$(b):</u> *Fall 1:* $\alpha = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\varepsilon^p > 0$. Wegen $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt $a_n = |a_n| < \varepsilon^p$. Mit der Monotonie der Abbildung $\sqrt[p]{\cdot}$ folgt $\left|\sqrt[p]{a_n}\right| = \sqrt[p]{a_n} < \sqrt[p]{\varepsilon^p} = \varepsilon$.

Fall 2: $\alpha > 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{p-1} \leq \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j} \left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}. \tag{+}$$

Insbesondere ist $\varepsilon\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{p-1} > 0$. Wir finden also $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{p-1} \quad \text{für alle } n \geq n_0. \tag{$\times$}$$

Sei jetzt $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{\alpha}\right| \\
= \;& \left|\frac{\left(\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{\alpha}\right)\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}}{\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}}\right| \\
= \;& \frac{\left|\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j} - \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j+1}\right|}{\left|\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}\right|} \\
= \;& \frac{\left|\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p} + \sum_{j=1}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j} - \sum_{j=1}^{p}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-(j-1)}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{(j-1)+1}\right|}{\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}} \\
= \;& \frac{\left|a_n + \sum_{j=1}^{p-1}\left(\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j} - \left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}\right) - \left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-(p-1)}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{(p-1)+1}\right|}{\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}} \\
= \;& \frac{|a_n - \alpha|}{\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sqrt[p]{a_n}\right)^{p-1-j}\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{j}} \overset{(+)}{\leq} \frac{|a_n - \alpha|}{\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{p-1}} \overset{(\times)}{<} \frac{\varepsilon\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{p-1}}{\left(\sqrt[p]{\alpha}\right)^{p-1}} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

<u>(b)$\Longrightarrow$(a):</u> Wir zeigen, daß $\sqrt[p]{a_n}^{\,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[p]{\alpha}^{\,k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus dem Spezialfall $k = p$.

Wie führen Induktion über k. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen; die zu beweisende Aussage ist dann genau die Voraussetzung, die wir beim Nachweis dieser Implikation zur Verfügung haben. Sei nun $k \geq 2$ und sei die Aussage für Zahlen $j \in \mathbb{N}$ mit $j < k$ anstelle von k schon bewiesen. Dann gilt, da $k - 1 < k$ ist, $\sqrt[p]{a_n}^{\,k-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[p]{\alpha}^{\,k-1}$ und nach Voraussetzung ohnehin $\sqrt[p]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[p]{\alpha}$. Aus dem Satz über das Produkt zweier konvergenter Folgen ergibt sich $\sqrt[p]{a_n}^{\,k} = \sqrt[p]{a_n}^{\,k-1}\sqrt[p]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[p]{\alpha}^{\,k-1}\sqrt[p]{\alpha} = \sqrt[p]{\alpha}^{\,k}$. ■