Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 3

Aufgabe 1.

Behauptung. Es gilt

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} : \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0 \right\} = \{ z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 1 \}.$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, und seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + iy = z$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{x-1+iy}{x+1+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x-1+iy}{x+1+iy} \cdot \frac{x+1-iy}{x+1-iy}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\frac{x^2-1+2iy+y^2}{(x+1)^2+y^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2iy}{(x+1)^2+y^2}\right) \\
&= \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Da $(x+1)^2 + y^2 > 0$ gilt also

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) > 0 \iff x^2 + y^2 < 1.$$

Diese Menge läßt sich geometrisch als die *Einheitskreisscheibe* darstellen, also die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 1.

Aufgabe 2.

Behauptung. Es existiert keine Relation $<$, mit der $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper wird.

Beweis. Annahme: Es existiert solch eine Relation $<$. Nach Vorlesung gilt dann $x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und daher insbesondere

$$-1 = i^2 > 0.$$

Andererseits gilt aber $1 > 0$ und daher $0 > -1$. Widerspruch.

Aufgabe 3.

Es bezeichne F_n die n-te Fibonacci-Zahl; d.h. $F_1 := F_2 := 1$ und $F_{n+2} := F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Es gilt

$$\frac{(1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = F_1$$

und

$$\frac{(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^2}{2^2\sqrt{5}} = \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}} = 1 = F_2.$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ derart, daß die Behauptung für n und $n+1$ gilt. Zu zeigen ist die Behauptung für $n+2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
F_{n+2} = F_n + F_{n+1} &= \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} + \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{2(1+\sqrt{5})^n + (1+\sqrt{5})^{n+1} - 2(1-\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^n(3-\sqrt{5})}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n(6+2\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5})^n(6-2\sqrt{5})}{2^{n+2}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n(1+2\sqrt{5}+5) - (1-\sqrt{5})^n(1-2\sqrt{5}+5)}{2^{n+2}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5})^2 - (1-\sqrt{5})^n(1-\sqrt{5})^2}{2^{n+2}\sqrt{5}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{5})^{n+2} - (1-\sqrt{5})^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.
Behauptung. Die Anzahl der möglichen Torfolgen, die beim Fußball zum Ergebnis $n : m$ führen, ist $\binom{n+m}{n}$.
Beweis. Sei im folgenden $A(n : m)$ die Anzahl der möglichen Torfolgen bei einem Ergebnis von $n : m$. Es gilt offensichtlich

$$A(n : 0) = A(0 : m) = 1$$

für alle n, m, sowie
$$A(n : m) = A(n-1 : m) + A(n : m-1),$$

falls $n, m \geq 1$. Die Behauptung folgt nun mit Hilfe der Rekursionsformeln für Binomialkoeffizienten leicht durch Induktion.

Alternativ folgt die Behauptung durch die folgende Überlegung. Wir numerieren die gefallenen Tore als $1, 2, \ldots, n+m$, und betrachten die (n-elementige) Menge aller Tore für die Heimmannschaft. Offenkundig ist diese Menge durch die Torfolge eindeutig bestimmt und umgekehrt. Die Anzahl der n-elementigen Teilmengen einer $n+m$-elementigen Menge ist aber gerade $\binom{n+m}{n}$.

Aufgabe 5.
Wir definieren $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.
Beweis. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Es gilt dann für $n \geq n_0$:

$$|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon.$$