Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 2

Aufgabe 1.
Seien $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$ und $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$.

BEHAUPTUNG. Es gilt

$$v_1 \in \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r) \Longleftrightarrow \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r) = \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r).$$

BEWEIS.
"$\Longleftarrow$": Es gelte $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r) = \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r)$. Dann gilt

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_r \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r) = \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r).$$

"$\Longrightarrow$": Es gelte $v_1 \in \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r)$, d.h. es existieren $\mu_2, \ldots, \mu_r \in \mathbb{R}$ mit $v_1 = \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r$. Offensichtlich gilt $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r) \supset \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r)$. Zu zeigen bleibt also, daß

$$\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r) \subset \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r).$$

Sei nun $v \in \operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_r)$; dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$. Es gilt also

$$\begin{aligned} v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r &= \lambda_1(\mu_2 v_2 + \cdots + \mu_r v_r) + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2) v_2 + \cdots + (\lambda_1 \mu_r + \lambda_r) v_r \in \operatorname{Span}(v_2, \ldots, v_r). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.
Wir definieren $v_1 = \left(\frac{7}{2}, -5, 10, -10, \frac{1}{2}\right)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4, 1)$, $w_1 = (-2, 3, -6, 6, 0)$, $w_2 = (0, 4, -8, 8, 8)$ und $w_3 = (1, -1, 2, -2, 1)$.

Behauptung.

a) Es gilt $\operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3) = \operatorname{Span}(w_1, w_3)$.

b) Es gilt $v_1 \in \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3)$ und $v_2 \notin \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3)$.

Beweis.

a) Nach Aufgabe 1 genügt es zu zeigen, daß $w_2 \in \operatorname{Span}(w_1, w_3)$ gilt. Es ist

$$w_2 = (0, 4, -8, 8, 8) = 4 \cdot (-2, 3, -6, 6, 0) + 8 \cdot (1, -1, 2, -2, 1) = 4w_1 + 8w_2.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_1 = \left(\frac{7}{2}, -5, 10, -10, \frac{1}{2}\right) &= -\frac{3}{2}(-2, 3, -6, 6, 0) + \frac{1}{2}(1, -1, 2, -2, 1) \\ &= -\frac{3}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \in \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, es gelte $v_2 \in \operatorname{Span}(w_1, w_2, w_3) = \operatorname{Span}(w_1, w_3)$. Dann existieren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$(1, 2, 3, 4, 1) = v_2 = \lambda w_1 + \mu w_3 = \lambda(-2, 3, -6, 6, 0) + \mu(1, -1, 2, -2, 1).$$

Insbesondere sind die dritte und vierte Komponente dieser beiden Vektoren gleich, und es folgt

$$\begin{aligned} 3 &= -6\lambda + 2\mu \text{ und} \\ 4 &= 6\lambda - 2\mu \end{aligned}$$

Es gilt also

$$3 = -6\lambda + 2\mu = -(6\lambda - 2\mu) = -4.$$

Widerspruch!

Bemerkung. Die hier auftauchenden Lösungen für $w_2 = \lambda w_1 + \mu w_3$ und $v_1 = \lambda w_1 + \mu w_3$ wurden selbstverständlich aus dem durch diese Vektorgleichungen beschriebenen linearen Gleichungssystemen gewonnen. Für den formalen Beweis der Existenz ist aber die Angabe der Methode, die zum Auffinden der Lösung verwendet wurde, nicht zwingend erforderlich — wenngleich für den Leser hilfreich.

Aufgabe 3.
Es seien A und B nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir definieren $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$ und $A-B := \{a-b : a \in A, b \in B\}$.
BEHAUPTUNG.

a) Es gilt $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

b) Es gilt $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$.

BEWEIS.

a) Zu zeigen sind:

 (i) $\sup A + \sup B$ ist obere Schranke von $A+B$.

 (ii) Ist c eine beliebige obere Schranke von $A+B$, so gilt $c \geq \sup A + \sup B$.

 Zu (i): Sei $x \in A+B$. Dann existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $r = a+b$. Es gilt $a \leq \sup A$ und $b \leq \sup B$, also

$$x = a + b \leq \sup A + \sup B.$$

 Zu (ii): Sei c eine beliebige obere Schranke von $A+B$. Wir zeigen zunächst: Für jedes $b \in B$ ist $\sup A \leq c - b$. Sei also $b \in B$. Dann gilt für jedes $a \in A$:

$$a = (a+b) - b \leq c - b.$$

 Also ist $c-b$ obere Schranke von A, und nach Definition des Supremums gilt:

$$\sup A \leq c - b.$$

 Daher ist $c - \sup A$ eine obere Schranke für B, und es folgt wiederum $\sup B \leq c - \sup A$, d.h.

$$\sup A + \sup B \leq c.$$

b) Wir setzen $-B := \{-b : b \in B\}$. Man beachte, daß $A-B = A+(-B)$. Wir beweisen zunächst, daß $\sup(-B) = -\inf B$ gilt. Dazu sind zu zeigen:

 (i) $-\inf B$ ist obere Schranke von $-B$.

 (ii) Ist c eine beliebige obere Schranke von B, so gilt $c \geq -\inf B$.

 Zu (i): Sei $x \in -B$; dann existiert $b \in B$ mit $x = -b$. Wegen $b \geq \inf B$ gilt dann $x = -b \leq -\inf B$.

 Zu (ii): Sei c eine obere Schranke von $-B$. Dann ist $-c$ eine untere Schranke von B, und daher gilt $-c \leq \inf B$.

 Zum Beweis der Behauptung bemerken wir nun noch, daß nach Aufgabenteil a) gilt:

$$\sup(A-B) = \sup(A+(-B)) = \sup(A) + \sup(-B) = \sup A - \inf B.$$

Aufgabe 4.
BEHAUPTUNG. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2. \tag{*}$$

BEWEIS. Sei $x \geq 0$. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.
Induktionsanfang. Es gilt

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + x + \frac{1(1-1)}{2}x^2.$$

Induktionsschluß. Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, daß (*) für n gilt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2)(1+x) \\
&= 1 + nx + x + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^3 \\
&\geq 1 + nx + x + \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right)x^2 \\
&= 1 + (n+1)x + \frac{n(n-1)+2n}{2}x^2 \\
&= 1 + (n+1)x + \frac{n(n+1)}{2}x^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.
Wir betrachten auf dem Körper $\mathcal{R}$ der rationalen Funktionen die auf dem letzten Aufgabenblatt definierte Ordnung $<$. Ferner sei für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = n$. (Dies sind die Elemente, die im geordneten Körper $\mathcal{R}$ den natürlichen Zahlen entsprechen.)

BEHAUPTUNG. Die Menge $N := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist in $\mathcal{R}$ nach oben beschränkt.
BEWEIS. Man betrachte die Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto -x.$$

Wir behaupten, daß F eine obere Schranke von N ist. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(f_n - F)(x) = n + x.$$

Die Funktion $f_n - F$ hat also genau eine Nullstelle, nämlich $-n$, und es gilt für alle $x < -n$:

$$(f_n - F)(x) < n - n < 0.$$

Nach Definition der Relation $<$ gilt also $f_n < F$.