Lösungen zu Analysis I und Lineare Algebra Ia für Physiker

Serie 1

Aufgabe 1.
Es seien A, B, C und D Mengen.
BEHAUPTUNG. Es gilt

a) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

b) $(A \times B) \setminus (C \times D) = \big((A \setminus C) \times B\big) \cup \big(A \times (B \setminus D)\big)$.

c) $(A \cup B)^2 \setminus \big((A \times B) \cup (B \times A)\big) = (A \setminus B)^2 \cup (B \setminus A)^2$.

BEWEIS.

a) Es gilt für alle Paare (x, y):

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in C \times D \\ &\iff (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D) \\ &\iff x \in (A \cap C) \wedge y \in (B \cap D) \\ &\iff (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).\end{aligned}$$

b) Es gilt für alle Paare (x, y):

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B) \setminus (C \times D) &\iff x \in A \wedge y \in B \wedge (x \notin C \vee y \notin D) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin C \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin D) \\ &\iff ((x,y) \in (A \setminus C) \times B) \vee ((x,y) \in (A \times (B \setminus D)).\end{aligned}$$

c) Folgt durch zweifaches Anwenden von b).

Folgerung: Wir definieren $A := \{1,2,3\}$, $B := \{2,3,4\}$ und $C := \{3,4,5\}$. Dann gilt:

a) $(A \times B) \cap C^2 = \{(3,3),(3,4)\}$.

b) $(A \times B) \setminus (B \times A) = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}$.

c) $(A \cup B)^2 \setminus \big((A \times B) \cup (B \times A)\big) = \{(1,1),(4,4)\}$.

Bemerkung: Dieses konkrete Beispiel läßt sich natürlich auch direkt nachrechnen.

Aufgabe 2.
Sei K ein beliebiger Körper.
BEHAUPTUNG. Es gilt für alle $a, b \in K$:

a) $(-1) \cdot a = -a$,

b) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$,

c) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

BEWEIS.

a) Sei $a \in K$. Dann gilt

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0.$$

Nach der Definition des additiven Inversen ist also $-a = (-1) \cdot a$.

b) Seien $a, b \in K$. Dann gilt nach a):

$$(-a) \cdot b = ((-1) \cdot a) \cdot b = (-1) \cdot (a \cdot b) = -(a \cdot b).$$

c) Seien $a, b \in K$. Dann gilt nach a):

$$(-a)\cdot(-b) = ((-1)\cdot a)\cdot((-1)\cdot b) = ((-1)\cdot(-1))\cdot(a\cdot b) = (-(-1))\cdot(a\cdot b) = 1\cdot(a\cdot b) = a\cdot b.$$

Aufgabe 3.
Definiere $M := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
BEHAUPTUNG. M ist — mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ — ein Körper.
BEWEIS. Zu zeigen ist:

a) $\forall x, y \in M : x + y \in M$.

b) $\forall x, y \in M : x \cdot y \in M$.

c) $\forall x \in M : -x \in M$.

d) $\forall x \in M \setminus \{0\} : x^{-1} \in M$.

e) $0, 1 \in M$.

Die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten in M, da $M \subset \mathbb{R}$.
Im folgenden seien $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Zu a): Es gilt $x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in M$.
Zu b): Es gilt $x \cdot y = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2} \in M$.
Zu c): Es gilt $-x = -a + (-b)\sqrt{2} \in M$.
Zu d): Es gelte $x \neq 0$. Ist $b = 0$, so ist also $a \neq 0$ und daher $x^{-1} = a^{-1} \in \mathbb{Q} \subset M$. Ist $b \neq 0$, so gilt $a - b\sqrt{2} \neq 0$, denn $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, also $\frac{a}{b} \neq \sqrt{2}$. Daher gilt:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \left(\frac{-b}{a^2 - 2b^2}\right)\sqrt{2} \in M.$$

Zu e): Es gilt $1, 0 \in \mathbb{Q} \subset M$.
Bemerkung: e) folgt auch aus c) und d) sowie der Tatsache, daß $M \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

Aufgabe 4.
Seien K ein geordneter Körper und $a, b \in K$.
BEHAUPTUNG. Es gilt

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|.$$

BEWEIS. Nach der Dreiecksungleichung gilt

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|,$$

also

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Analog gilt

$$-\big(|a| - |b|\big) = |b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Aufgabe 5.

Wir definieren auf der Menge $\mathcal{R}$ der rationalen Funktionen eine Relation $<$ wie folgt. Sei zunächst $f \neq 0$ eine beliebige rationale Funktion, und sei x_0 derart, daß f für $x < x_0$ keine Null- oder Polstellen hat. Dann hat $f(x)$ für alle $x < x_0$ dasselbe Vorzeichen. Wir definieren $f < 0$, falls $f(x) < 0$ für alle $x < x_0$ gilt. Sind f und g zwei rationale Funktionen, so definieren wir

$$f < g \iff f - g < 0.$$

BEHAUPTUNG. Diese Relation erfüllt die Ordnungsaxiome. (D.h., $\mathcal{R}$ ist mit dieser Ordnung ein geordneter Körper.)
BEWEIS. Wir zeigen zunächst:

a) Ist $f \in \mathcal{R}$, so gilt genau eine der Aussagen $f < 0$, $-f < 0$ und $f = 0$.

b) Sind $f, g \in \mathcal{R}$ mit $f, g < 0$, so gilt auch $f + g < 0$.

c) Sind $f, g \in \mathcal{R}$ mit $f < 0$ und $g > 0$, so gilt $f \cdot g < 0$.

Sei $f \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$, und sei x_0 wie oben gewählt. Dann gilt entweder $f(x) < 0$ für alle $x < x_0$, oder andernfalls $f(x) > 0$ für alle $x > x_0$. $f(x) > 0$ ist äquivalent zu $-f(x) < 0$. (Man beachte, daß dies die normalen Regeln für reelle Zahlen sind!) Es gilt also entweder $f < 0$ oder $-f < 0$.
Seien nun $f, g \in \mathcal{R}$ mit $f, g < 0$. Seien x_0 und y_0 derart, daß f für $x \leq x_0$, g für $x \leq y_0$ keine Null- oder Polstellen hat. Dann gilt für $x \leq z_0 := \min(x_0, y_0)$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) < 0,$$

denn $f(x) < 0$ und $g(x) < 0$.
Seien schließlich $f, g \in \mathcal{R}$ mit $f < 0$ und $g > 0$. Seien x_0 und y_0 derart, daß f für $x < x_0$ und g für $x < y_0$ keine Null- oder Polstellen haben. Dann hat für $x < \min(x_0, y_0)$ auch $f \cdot g$ keine Null- oder Polstellen, und es gilt:

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) < 0,$$

da $f(x) < 0$ und $g(x) > 0$.
Wir zeigen nun die Anordnungsaxiome. Seien $f, g, h \in \mathcal{R}$.

A1 Nach a) gilt genau eine der drei Beziehungen $f - g < 0$, $f - g = 0$ und $-(f - g) = g - f < 0$, also gilt nach Definition von $<$ genau eine der Beziehungen $f < g$, $f = g$ und $g < f$.

A2 Es gelte $f < g$ und $g < h$, d.h. $f - g < 0$ und $g - h < 0$. Nach b) gilt dann $f - h = f - g + g - h < 0$, also $f < h$.

A3 Es gelte $f < g$, d.h. $f - g < 0$. Dann ist $(f + h) - (g + h) = f - g < 0$, also $f + h < g + h$.

A4 Es gelte $f < g$ und $h > 0$. Dann gilt nach c) $f \cdot h - g \cdot h = (f - g)h < 0$, also $f \cdot h < g \cdot h$.