

Analysis I

Walter Bergweiler

WS 1999/2000

Fassung vom 7. Februar 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Aussagenlogik	1
1.3 Mengen	4
1.4 Quantoren	6
1.5 Relationen und Funktionen	8
1.6 Vollständige Induktion	13
1.7 Körper	15
1.8 Reelle Zahlen	20
1.9 Komplexe Zahlen	25
2 Folgen und Reihen	28
2.1 Folgen	28
2.2 Rechenregeln	31
2.3 Konvergenzkriterien	33
2.4 Limes superior und inferior sowie uneigentliche Grenzwerte	38
2.5 Die allgemeine Potenz	39
2.6 Reihen	40
2.7 Absolute und bedingte Konvergenz	42
2.8 Kriterien für absolute Konvergenz	45
2.9 Potenzreihen	46
3 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen	49
3.1 Stetigkeit	49
3.2 Der Zwischenwertsatz	51
3.3 Offene und abgeschlossene Mengen	53
3.4 Kompakte Mengen	55
3.5 Grenzwerte von Funktionen	56
3.6 Folgen stetiger Funktionen	59
3.7 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen	61

4	Differenzierbarkeit	64
4.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	64
4.2	Der Mittelwertsatz	68
4.3	Anwendungen des Mittelwertsatzes	71
4.4	Folgen und Reihen differenzierbarer Funktionen	76

1 Grundlagen

1.1 Einleitung

“Was ist Mathematik?” Dies ist der Titel eines (lesenswerten) Buches von R. Courant und H. Robbins. Die Antwort ist nicht einfach, und das genannte Buch gibt sie, indem es in mathematische Methoden und Denkweisen einführt. Wir verzichten auf eine “Definition” des Begriffs “Mathematik”, sondern begnügen uns zunächst mit der Feststellung, daß die Mathematik eine Wissenschaft ist, die Aussagen über (abstrakte) Objekte wie Zahlen, Mengen, Funktionen, usw. macht.

Die Vorgehensweise ist dabei folgende: man beginnt mit gewissen Grundaussagen, den sogenannten *Axiomen*. Neue Aussagen gewinnt man aus diesen Axiomen (und bereits gewonnenen Aussagen) durch logisches Schließen. Eine so gewonnene Aussage nennt man *Satz* (oder auch Theorem), in manchen Fällen auch *Hilfssatz* (Lemma), *Folgerung* (Korollar) oder ähnlich. Die Herleitung einer solchen Aussage durch logisches Schließen nennt man *Beweis*. Die Festlegung eines neuen Begriffs nennt man *Definition*.

Was ist Analysis? Auch auf eine Definition des Begriffs “Analysis” soll hier verzichtet werden. Wir nennen lediglich einige der Grundbegriffe: reelle und komplexe Zahlen, Funktionen, Stetigkeit, Ableitung, Integral,... Wie die meisten anderen mathematischen Disziplinen hat auch die Analysis vielfältige Anwendungen. So bedient man sich etwa bei der mathematischen Beschreibung von Vorgängen in Naturwissenschaft und Technik oft der Sprache und Methoden der Analysis. Stellt man beispielsweise die Position eines beweglichen Teilchens als Funktion der Zeit dar, so ist seine Geschwindigkeit durch die Ableitung und seine Beschleunigung durch die zweite Ableitung gegeben.

1.2 Aussagenlogik

(Mathematische) Aussagen können wahr (w) oder falsch (f) sein:

$$\begin{aligned} 2+3=4 & \text{ (f)} \\ 7 \text{ ist eine Primzahl} & \text{ (w)}. \end{aligned}$$

Es muß nicht bekannt sein, ob eine Aussage wahr oder falsch ist:

Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n , so daß
 n und $n + 2$ beide Primzahlen sind (?).

Die Verneinung (Negation) einer Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet; gesprochen “nicht A ”. Es ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aus Aussagen A und B lassen sich durch die folgenden Operationen neue Aussagen gewinnen:

- $A \wedge B$, gesprochen “ A und B ”: wahr genau dann, wenn A und B beide wahr sind.

- $A \vee B$, gesprochen “ A oder B ”: wahr genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen A, B wahr ist.
- $A \Rightarrow B$, gesprochen “aus A folgt B ”, “ A impliziert B ” oder “wenn A , dann B ”: nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch; gleichbedeutend mit $\neg A \vee B$. (Mit $\neg A \vee B$ ist hier $(\neg A) \vee B$ und nicht $(\neg A \vee B)$ gemeint.) Man schreibt auch $B \Leftarrow A$ statt $A \Rightarrow B$.
- $A \Leftrightarrow B$, gesprochen “ A ist äquivalent zu B ”: genau dann wahr, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind; gleichbedeutend mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

21.10.99

Die Wahrheitswerte der Aussagen $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ sowie $A \Leftrightarrow B$ sind also durch die von A und B festgelegt. Man stellt dies auch in einer sogenannten Wahrheitstafel dar:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w	w

Man erkennt hier die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$. Anders gesagt, die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ ist immer wahr, unabhängig vom Wahrheitswert von A und B .

Ebenso erkennt man, daß $A \Rightarrow B$ immer dann wahr ist, wenn A falsch ist. Aus einer falschen Aussage kann also jede Aussage gefolgert werden!

Schließlich beachte man, daß $A \vee B$ auch dann wahr ist, wenn A und B beide gelten. In der Mathematik ist mit “oder” also immer das “einschließende oder” und nicht “entweder-oder, aber nicht beides” gemeint.

Mathematische Sätze haben in der Regel die Form $A \Rightarrow B$. Dann heißt A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*. Man sagt auch, daß A eine *hinreichende Bedingung* für B ist und B eine *notwendige Bedingung* für A ist.

Gleichbedeutend mit $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$. Hiervon überzeugt man sich anhand der Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ heißt *Kontraposition* der Aussage $A \Rightarrow B$. Die Kontraposition der (wahren) Aussage “Wenn eine natürliche Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar” lautet beispielsweise: “Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so ist sie auch nicht durch 9 teilbar”.

Die Gültigkeit der folgenden Aussagen verifiziert man leicht durch Aufstellen der Wahrheitstafel. Dabei sind A, B und C beliebige Aussagen.

- (i) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

- (ii) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- (iii) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- (iv) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- (v) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- (vi) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- (vii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- (viii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- (ix) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Man nennt (i) und (ii) *Kommutativgesetz*, (iii) und (iv) *Assoziativgesetz* sowie (v) und (vi) *Distributivgesetz*. Aufgrund des Assoziativgesetzes kann man bei den Ausdrücken $A \wedge B \wedge C$ sowie $A \vee B \vee C$ also auf Klammern ganz verzichten.

Zum Beweis eines Satzes der Form " $A \Rightarrow B$ " gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Direkter Beweis. Man findet Aussagen A_1, A_2, \dots, A_n mit

$$(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_n \Rightarrow B).$$

Man schreibt dies auch kurz als

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B.$$

Man überzeugt sich (durch Aufstellen der Wahrheitstafel), daß $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)$ tatsächlich $A \Rightarrow B$ impliziert, d.h., es gilt

$$((A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

für Aussagen A, A_1, B . Dies ist obige Situation falls $n = 1$. Wir werden später sehen, wie man den Fall beliebiger natürlicher Zahlen n behandeln kann (vollständige Induktion).

Indirekter Beweis. Die einfachste Form des indirekten Beweises ist der direkte Beweis der *Kontraposition* $\neg B \Rightarrow \neg A$. Eine andere Form ist der *Beweis durch Widerspruch*. Man nimmt $A \wedge \neg B$ sowie eventuell weitere bekannte (wahre) Aussagen an, und erzielt ein Widerspruch zu bekannten (wahren) Aussagen. Formal zeigt man also mit wahren Aussagen C und D , daß $A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow \neg D$ gilt. (Man beachte, daß $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.)

1.3 Mengen

Nach G. Cantor (1895) ist eine *Menge* M eine "Zusammenfassung aus wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einer Gesamtheit".

Ist x ein Element der Menge M , so bezeichnen wir dies mit $x \in M$. Ist x kein Element von M , so schreiben wir $x \notin M$. Es gilt also $x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Mengen können durch explizite Angabe ihrer Elemente definiert werden. So ist $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ die aus den Elementen x_1, \dots, x_n bestehende Menge M . Mengen können auch durch die Eigenschaften ihrer Elemente definiert werden:

$$M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

Zum Beispiel ist

$$\{x : x \text{ ist Primzahl} \wedge x \leq 10\} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Die *leere Menge* ist die Menge, die kein Element enthält. Sie wird mit \emptyset bezeichnet.

Wie definieren einige weitere wichtige Mengen. Das Zeichen ":= " bedeutet hier und im folgenden "wird definiert als". (Bei der Definition von Aussagen benutzt man analog das Zeichen ":\Leftrightarrow".)

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen
- \mathbb{R} ist die Menge der reellen Zahlen.

N heißt *Teilmenge* von M , falls $x \in N$ impliziert, daß $x \in M$ gilt. Wir bezeichnen dies mit $N \subset M$ oder $M \supset N$. Insbesondere bei Benutzung der zweiten Schreibweise sagen wir auch, daß M *Obermenge* von N ist. Man beachte, daß $N = M$ zugelassen ist. Es gilt

$$N = M \Leftrightarrow (N \subset M) \wedge (M \subset N).$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. (Dies ist eine kurze Schreibweise für $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}) \wedge (\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$.)

N heißt *echte Teilmenge* von N falls $N \subset M$ und $N \neq M$. Dafür benutzen wir die Schreibweise $N \subsetneq M$ oder $M \supsetneq N$. Analog spricht man auch von *echten Obermengen*. Es gilt auch $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Hinweis. Die Terminologie ist in der Literatur uneinheitlich. Manche Autoren benutzen " \subseteq " anstelle von " \subset ", und dort entspricht " \subset " dann dem hier verwandten " \subsetneq ".

Die Potenzmenge $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M , also

$$P(M) = \{N : N \subset M\}.$$

Zum Beispiel ist $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Für Mengen M und N heißen

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$$

Durchschnitt und

$$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$$

Vereinigung von M und N .

Die Mengen M und N heißen *disjunkt* falls $M \cap N = \emptyset$. Weiter ist $M \setminus N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$, gesprochen “ M ohne N ”. Im Falle $N \subset M$ heißt $M \setminus N$ auch *Komplement* von N (in M).

Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3\}$ ist also $M \cap N = \{2\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ und $M \setminus N = \{1\}$.

25.10.99

Die folgenden Regeln für Mengen L, M, N sind analog zu den entsprechenden Regeln der Aussagenlogik:

- (i) $M \cap N = N \cap M$
- (ii) $M \cup N = N \cup M$
- (iii) $(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$
- (iv) $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$
- (v) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$
- (vi) $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$
- (vii) $M \setminus (M \setminus N) = M \cap N$
- (viii) $L \setminus (M \cup N) = L \setminus M \cap L \setminus N$
- (ix) $L \setminus (M \cap N) = L \setminus M \cup L \setminus N$.

Im Falle $N \subset M$ gilt mit (vii) also $M \setminus (M \setminus N) = N$. Man bezeichnet (i)-(vi) wieder als Kommutativ-, Assoziativ- bzw. Distributivgesetz. Die Gleichungen (viii) und (ix) heißen *Regeln von de Morgan*. Wir führen hier nur den *Beweis von (v)*. Es gilt

$$\begin{aligned} & x \in L \cap (M \cup N) \\ \Leftrightarrow & x \in L \wedge (x \in M \cup N) \\ \Leftrightarrow & x \in L \wedge (x \in M \vee x \in N) \\ \Leftrightarrow & (x \in L \wedge x \in M) \vee (x \in L \wedge x \in N) \\ \Leftrightarrow & (x \in L \cap M) \vee (x \in L \cap N) \\ \Leftrightarrow & x \in (L \cap M) \cup (L \cap N) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. Die anderen Regeln beweist man analog.

Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, also

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\}.$$

Man beachte, daß $M \times N \neq N \times M$ für $M \neq N$ und $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$.

Allgemeiner setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und Mengen M_1, M_2, \dots, M_n auch

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in M_1 \wedge \dots \wedge x_n \in M_n\}.$$

Im Falle $M_1 = M_2 = \dots = M_n = M$ schreibt man statt $\underbrace{M \times M \times M \dots \times M}_{n \text{ - mal}}$ auch

M^n . So ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte des \mathbb{R}^3 entsprechen den Punkten des dreidimensionalen Raumes, die des \mathbb{R}^2 denen der Ebene.

Der hier verwandte "naive" Mengenbegriff führt zu Widersprüchen (Antinomien). Klassisches Beispiel ist die *Russellsche Antinomie*: sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, d.h.,

$$M = \{x : x \text{ Menge} \wedge x \notin x\}$$

Aus $M \notin M$ folgt dann $M \in M$, und umgekehrt. Es gilt also

$$M \in M \Leftrightarrow \neg(M \in M),$$

was ein Widerspruch ist. Der Widerspruch ist nur behebbar durch eine genauere Definition des Begriffs Menge - wir verzichten aber hier darauf.

Das obige Problem tritt nicht auf, falls - wie wir es tun werden - nur Teilmengen gewisser "unproblematischer" Grundmengen betrachtet werden.

1.4 Quantoren

In mathematischen Aussagen treten häufig Variable auf, etwa die Variable x in der durch " x ist Primzahl" gegebenen Aussage $A(x)$. Sinnvoll sind solche Aussagen im allgemeinen nur für Variable aus gewissen Mengen, im genannten Beispiel etwa $x \in M$ mit $M = \mathbb{N}$.

Mit Hilfe der Quantoren \forall ("für alle") und \exists ("es gibt") lassen sich aus einer für $x \in M$ erklärten Aussage $A(x)$ neue Aussagen bilden. Die Aussage

$$\forall x \in M : A(x),$$

bedeutet: "für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ ". Formal kann man die Aussage " $\forall x \in M : A(x)$ " definieren, indem man sie als wahr definiert falls $M = \{x \in M : A(x)\}$, und als falsch sonst. Die Aussage

$$\exists x \in M : A(x)$$

bedeutet: "es gibt ein $x \in M$ für welches $A(x)$ gilt". Dies gilt falls $\{x \in M : A(x)\} \neq \emptyset$. Ist etwa $M = \{a, b\}$, so gilt

$$\forall x \in M : A(x) \Leftrightarrow A(a) \wedge A(b)$$

und

$$\exists x \in M : A(x) \Leftrightarrow A(a) \vee A(b)$$

Analoges gilt für beliebige endliche Mengen M . Quantoren erlauben eine Verallgemeinerung auf unendliche Mengen M .

Regeln wie $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ verallgemeinern sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x \in M : A(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x), \\ \neg(\exists x \in M : A(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x).\end{aligned}$$

Beweis der ersten Äquivalenz

$$\begin{aligned}&\neg(\forall x \in M : A(x)) \\ \Leftrightarrow &\neg(M = \{x \in M : A(x)\}) \\ \Leftrightarrow &M \neq \{x \in M : A(x)\} \\ \Leftrightarrow &M \setminus \{x \in M : A(x)\} \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow &\{x \in M : \neg A(x)\} \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow &\exists x \in M : A(x).\end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz ist analog.

Als Beispiel betrachten wir die (falsche) Aussage “Alle Primzahlen sind ungerade”. Ist $A(x)$ die (für ganze Zahlen erklärte) Aussage “ x ist ungerade” und M die Menge der Primzahlen, so können wir die Aussage “Alle Primzahlen sind ungerade” in der Form “ $\forall x \in M : A(x)$ ” schreiben. Die Negation davon ist die (wahre) Aussage “ $\exists x \in M : \neg A(x)$ ”, die wir in Worten als “Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist” ausdrücken können. (Die Aussage ist wahr, da 2 eine gerade Primzahl ist.) Ein häufiger Fehler ist, als Negation der Aussage “ $\forall x \in M : A(x)$ ” die Aussage “ $\forall x \in M : \neg A(x)$ ” anzugeben (“Alle Primzahlen sind gerade.”).

Eine Aussage kann mehrere Quantoren enthalten. Bei verschiedenen Quantoren kommt es dabei auf die Reihenfolge an. Sei zum Beispiel S die Menge der deutschen Städte, M die Menge der Menschen und $A(x, y)$ die für $x \in S$ und $y \in M$ erklärte Aussage : y besitzt ein Haus in x . So ist die Aussage

$$\forall x \in S \exists y \in M : A(x, y),$$

d.h. “zu jeder Stadt existiert ein Mensch, der dort ein Haus besitzt”, vermutlich richtig, während

$$\exists y \in M \forall x \in S : A(x, y),$$

d.h. “es existiert ein Mensch, der in jeder deutschen Stadt ein Haus besitzt”, vermutlich falsch ist. Auf jeden Fall sind beide Aussagen verschieden. Die Negation der letzten Aussage läßt sich rein formal bilden:

$$\begin{aligned}&\neg(\exists y \in M \forall x \in S : A(x, y)) \\ \Leftrightarrow &\forall y \in M : \neg(\forall x \in S : A(x, y)) \\ \Leftrightarrow &\forall y \in M \exists x \in S : \neg A(x, y)\end{aligned}$$

Wir erhalten “zu jedem Mensch existiert eine Stadt, in der er kein Haus besitzt”.

Quantoren erlauben auch, Vereinigung und Durchschnitt von unendlich vielen Mengen zu definieren. Für eine Menge S von Mengen setzen wir

$$\bigcap_{M \in S} M := \{x : (\forall M \in S : x \in M)\}$$

und

$$\bigcup_{M \in S} M := \{x : (\exists M \in S : x \in M)\}$$

Die Regeln von de Morgan gelten dann entsprechend. Mit einer Menge N ist dann

$$N \setminus \bigcap_{M \in S} M = \bigcup_{M \in S} N \setminus M$$

und

$$N \setminus \bigcup_{M \in S} M = \bigcap_{M \in S} N \setminus M.$$

Neben den Quantoren \forall und \exists benutzen wir auch noch das Symbol “ $\exists!$ ” für “es gibt genau ein”. Die Aussage “ $\exists! x \in M : A(x)$ ” ist also definiert durch “ $\{x \in M : A(x)\}$ besteht aus genau einem Element”.

28.10.99

1.5 Relationen und Funktionen

Seien M, N Mengen und $R \subset M \times N$. Dann heißt R *Relation* (zwischen M und N). Im Falle $M = N$ nennen wir R auch Relation auf M . Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir im allgemeinen xRy . Anstelle von Buchstaben benutzen wir meistens suggestive Symbole wie $\sim, \simeq, <, \subset$, usw. zur Bezeichnung von Relationen.

Beispiel: $M = N = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2\}$. Es gilt also $xRy \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$, also $xRy \Leftrightarrow |x| \geq |y|$. Die durch R gegebene Teilmenge von \mathbb{R}^2 kann auch graphisch dargestellt werden.

Wir betrachten drei wichtige Spezialfälle.

(a) *Äquivalenzrelationen.* Sei M Menge, \sim Relation auf M , also $\sim \subset M \times M$. Dann heißt \sim

- *reflexiv*, falls $\forall x \in M : x \sim x$,
- *symmetrisch*, falls $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
- *transitiv*, falls $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*.

Beispiele: 1. Die Gleichheitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.

2. Sei M die Menge der “Landpunkte” der Erdoberfläche (also die Menge der Punkte, die nicht im Meer oder anderen Gewässern liegen). Für $x, y \in M$ gelte $x \sim y$ falls x mit y auf dem Landweg verbunden werden kann. Dann ist \sim Äquivalenzrelation.

Grundlegende Eigenschaft einer Äquivalenzrelation \sim auf einer Menge M ist, daß sie eine Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen - die sogenannten Äquivalenzklassen - liefert, so daß für $x, y \in M$ genau dann $x \sim y$ gilt, wenn x, y in derselben Teilmenge liegen. Formal kann man dies wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} & \sim \text{ ist Äquivalenzrelation auf } M \\ \Leftrightarrow & \exists A \subset P(M) : \left\{ \bigcup_{N \in A} N = M \right. \\ & \wedge [\forall L, N \in A : L \neq N \Rightarrow L \cap N = \emptyset] \\ & \left. \wedge [\forall x, y \in M : (x \sim y \Leftrightarrow \exists N \in A : x \in N \wedge y \in N)] \right\} \end{aligned}$$

Wir skizzieren den Beweis nur. Für $x \in M$ setzen wir $[x] := \{y \in M : x \sim y\}$. Sei nun $x, y \in M$ mit $x \sim y$. Ist dann $z \in [y]$, also $y \sim z$, so ist nach Transitivität auch $x \sim z$, also $z \in [x]$. Es folgt $[y] \subset [x]$. Aus Symmetriegründen ist auch $[x] \subset [y]$, also $[x] = [y]$. Im Falle $x \not\sim y$ (was nach Definition $\neg(x \sim y)$ bedeuten soll) zeigt man $[x] \cap [y] = \emptyset$, woraus dann die Behauptung folgt.

Wir werden die Bezeichnung $[x]$ für die Äquivalenzklasse $\{y \in M : x \sim y\}$ auch im folgenden verwenden. Man beachte, daß $x \in [x]$, da Äquivalenzrelationen insbesondere symmetrisch sind.

Im obigen Beispiel 1 (Gleichheitsrelation) gilt $[x] = \{x\}$ für alle $x \in M$. Im Beispiel 2 nennt man die Äquivalenzklassen (je nach Größe) Erdteil oder Insel.

(b) *Ordnungsrelationen.* Eine Relation \prec auf einer Menge M heißt *antisymmetrisch* (oder *identitiv*) falls

$$\forall x, y \in M : x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y.$$

Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt *Halbordnung*.

- Beispiele.* 1. $M = \mathbb{R}$, $\prec = \leq$
2. X Menge, $M = P(X)$, $\prec = \subset$.

Eine Relation \prec auf M heißt *total* (oder *vollständig*), falls

$$\forall x, y \in M : x \prec y \vee y \prec x.$$

Eine totale Halbordnung heißt *Ordnung*. Das Paar (M, \prec) heißt dann *geordnete Menge*.

Im obigem Beispiel 1 ist \leq Ordnung, während \subset in Beispiel 2 keine Ordnung ist, wenn M mindestens zwei Elemente hat. Denn sind $a, b \in M$, $a \neq b$, so ist $\{a\} \subset P(M)$ und $\{b\} \subset P(M)$, aber weder $\{a\} \subset \{b\}$ noch $\{b\} \subset \{a\}$.

Sei \prec Halbordnung auf M und $A \subset M$. Dann heißt A *nach oben beschränkt*, falls $s \in M$ existiert, so daß $a \prec s$ für alle $a \in A$ gilt. Ein solches s heißt *obere Schranke* von A . Eine obere Schranke von A , die in A enthalten ist, heißt *Maximum* von A . Eine obere Schranke s von A heißt *Supremum* (oder kleinste obere Schranke) von A , wenn für jede obere Schranke t von A gilt, daß $s \prec t$.

Beispiele: 1. $X = \{a, b, c\}$, $M = P(X)$, $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$, $\prec = \subset$. Die Menge $\{a, b\}$ ist Supremum, aber kein Maximum von A .

2. $M = A = \mathbb{N}$, $\prec = \leq$. Hier besitzt A kein Supremum.

Satz 1.5.1 Sei M Menge, $A \subset M$ und \prec Halbordnung auf M .

- (i) Ein Maximum von A ist auch Supremum von A .
- (ii) A besitzt höchstens ein Supremum.

Beweis.

- (i) Sei s Maximum von A , d.h., s ist obere Schranke von A und es gilt $s \in A$. Zu zeigen ist, daß s Supremum ist. Sei dazu t obere Schranke von A . Zu zeigen ist, daß $s \prec t$. Dies gilt aber wegen $s \in A$ nach Definition der oberen Schranke.
- (ii) Seien r und s Suprema. Dann gelten sowohl $r \prec s$ wie auch $s \prec r$, also folgt $r = s$. \square

Hier und im folgenden wird durch das Symbol \square das Ende eines Beweises markiert.

Aus Satz 1.5.1 folgt, daß eine Menge höchstens ein Maximum haben kann. Wir bezeichnen das Maximum (bzw. Supremum) einer Menge A mit $\max A$ (bzw. $\sup A$), falls es existiert.

Völlig analog definiert man nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (größte untere Schranke), $\inf A$, Minimum, $\min A$. Satz 1.5.1 gilt entsprechend.

Eine geordnete Menge (M, \prec) heißt *ordnungsvollständig*, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von M ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen, daß (M, \prec) genau dann ordnungsvollständig ist, wenn jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von M ein Infimum besitzt.

Ist \prec Ordnung auf M , so heißt die durch

$$x \underset{\neq}{\prec} y :\Leftrightarrow x \prec y \wedge x \neq y$$

definierte Relation *strikte Ordnung* auf M . Für $x, y \in M$ gilt dann genau einer der drei Fälle $x \underset{\neq}{\prec} y$, $x = y$ oder $y \underset{\neq}{\prec} x$. Ist umgekehrt $\underset{\neq}{\prec}$ eine transitive Relation mit der letzten Eigenschaft, so ist $\underset{\neq}{\prec}$ strikte Ordnung, und die zugehörige Ordnung \prec ist durch

$$x \prec y \Leftrightarrow x \underset{\neq}{\prec} y \vee x = y$$

gegeben.

Für $M = \mathbb{R}$, $\prec = \leq$ ist natürlich $\underset{\neq}{\prec} = <$. Statt $x < y$ bzw. $x \leq y$ schreiben wir auch $y > x$ bzw. $y \geq x$.

1.11.99

(c) *Funktionen.* Eine Relation f zwischen Mengen M und N heißt *Funktion* (oder *Abbildung*) von M nach N (oder in N) falls zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit xfy existiert, d.h.,

$$\forall x \in M \exists ! y \in N : (x, y) \in f.$$

Wir bezeichnen das zu $x \in N$ existierende, eindeutig bestimmte y , welches xfy erfüllt, mit $f(x)$ und nennen es *Bild von x (unter f)* oder *Wert von f an der Stelle x* . Man muß zwischen der Funktion f (Teilmenge von $M \times N$) und dem Wert $f(x)$ (Element von N) unterscheiden.

Obwohl eine Funktion f von M nach N also formal nichts anderes als eine Teilmenge von $M \times N$ mit gewissen Eigenschaften ist, ist es oft hilfreich, sich f als Vorschrift vorzustellen, die jedem Wert $x \in M$ sein Bild $y \in N$ zuordnet. Dieser Gedanke kommt auch in den Schreibweisen

$$f : M \rightarrow N, f(x) = \dots$$

und

$$f : M \rightarrow N, x \mapsto \dots,$$

die wir für Funktionen benutzen, zum Ausdruck.

Man kann den obigen Gedanken, sich f als Vorschrift vorzustellen, auch zur Definition des Funktionsbegriffes verwenden. In diesem Falle würde man $\{(x, f(x)) : x \in M\}$ als Graph der Funktion f bezeichnen. Wir haben hier die Funktion f über ihren Graphen definiert, d.h., es gilt $f = \{(x, f(x)) : x \in M\}$.

Man sollte die Vorstellung, daß eine Funktion $f : M \rightarrow N$ eine Vorschrift ist, die jedem $x \in M$ ein $y \in N$ zuordnet, aber nicht so interpretieren, daß dieses y auch immer effektiv berechnet werden kann. Beispielsweise ist bei der Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \text{größte Primzahl, die } x \text{ teilt}$$

der Wert $f(x)$ für große x (mit mehreren hundert Stellen) kaum zu berechnen.

Für eine Funktion $f : M \rightarrow N$ nennen wir M *Definitionsbereich* und N *Zielbereich*. Man beachte, daß M durch f eindeutig festgelegt ist, denn $M = \{x : \exists y : (x, y) \in f\}$. Der Zielbereich ist durch die Funktion f (also durch die Menge f) aber nicht eindeutig festgelegt. Zum Beispiel kann er durch jede Obermenge ersetzt werden, d.h., ist f Funktion von M nach N und ist $N' \supset N$, so ist f auch Funktion von M nach N' .

Sei f Funktion von M nach N , $A \subset M$ und $B \subset N$. Dann heißt

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von A (unter f) und

$$f^{-1}(B) := \{x \in A : f(x) \in B\}$$

Urbild von B (unter f). Das Bild von M , also die Menge $f(M)$, heißt *Wertebereich (von f)*. Man beachte, daß die Bezeichnungen hier uneinheitlich sind: in manchen Büchern wird auch N als Wertebereich bezeichnet. Für $y \in N$ schreibt man statt $f^{-1}(\{y\})$ auch $f^{-1}(y)$.

Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt *injektiv* (oder *eindeutig*) falls gilt:

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

(Äquivalent zu obiger Implikation ist natürlich ihre Kontraposition: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$). Eine Funktion $f : M \rightarrow N$ heißt *surjektiv* (oder Funktion von M auf N) falls $f(M) = N$, d.h., falls gilt:

$$\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y.$$

Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Ist $f : M \rightarrow N$ bijektiv, so gilt

$$\forall y \in N \exists! x \in M : f(x) = y.$$

Man beachte, daß Surjektivität und damit Bijektivität keine Eigenschaft der Funktion (also Menge) selbst ist, sondern die Angabe eines Zielbereiches erfordert. Bei Injektivität ist dies nicht der Fall.

Beispiele. 1. Die Funktion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv. Denn wegen $f(-1) = f(1)$ ist sie nicht injektiv, und wegen $f^{-1}(2) = \emptyset$ ist sie nicht surjektiv.

2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$, ist injektiv aber nicht surjektiv.

3. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto$ größte natürliche Zahl, die nicht größer als \sqrt{x} ist. Dann ist f surjektiv, da für jedes $y \in \mathbb{N}$ zum Beispiel $f(y^2) = y$ gilt. Die Funktion f ist aber nicht injektiv, da zum Beispiel $f(1) = f(2)$.

Man bezeichnet zu einer reellen Zahl x die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, auch mit $[x]$. Durch $x \mapsto [x]$ wird damit eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{Z} definiert. Man nennt $[x]$ auch Gaußklammer von x . Die Funktion f aus Beispiel 3 kann damit als $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = [\sqrt{x}]$, geschrieben werden.

Ist $f : M \rightarrow N$ bijektiv, so gilt

$$\forall y \in N \exists! x \in M : f(x) = y.$$

Damit existiert eine Funktion von N nach M , die jedem $y \in N$ dieses $x \in M$ zuordnet. Sie heißt *Umkehrfunktion* (oder *inverse Funktion*) von f und wird mit f^{-1} bezeichnet. Formal gilt einfach $f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in M\} \subset N \times M$.

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : P \rightarrow Q$ Funktionen mit $f(M) \subset P$. Dann ist die *Komposition* (oder *Zusammensetzung* $g \circ f$ definiert durch

$$g \circ f : M \rightarrow Q, x \mapsto g(f(x)).$$

Sei $id_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$ die *Identität* (oder *identische Abbildung*) einer Menge M . Ist dann $f : M \rightarrow N$ bijektiv, so ist $f^{-1} \circ f = id_M$ und $f \circ f^{-1} = id_N$.

Satz 1.5.2 Sei $f : M \rightarrow N$ Funktion. Dann gilt:

(i) f injektiv $\Leftrightarrow \exists g : N \rightarrow M : g \circ f = id_M$.

(ii) f surjektiv $\Leftrightarrow \exists h : N \rightarrow M : f \circ h = id_N$.

Der Beweis sei als Übung überlassen. Funktionen g, h wie in (i),(ii) nennt man auch Links- bzw. Rechtsinverse.

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{1\}, x \mapsto x + 1$, ist bijektiv und $f^{-1} : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x - 1$.

4.11.99

Sei $f : M \rightarrow N$ Funktion, $L \subset M$. Die Funktion $g : L \rightarrow N, x \mapsto f(x)$, heißt *Einschränkung* (oder *Restriktion*) von f auf L und wird mit $f|_L$ bezeichnet. Ist g Einschränkung von f , so nennt man f auch Fortsetzung von g . Die Fortsetzung einer Funktion ist natürlich nicht eindeutig.

Es sei $f : M \rightarrow N$ Funktion und es sei auf N eine Ordnung gegeben. Dann heißt f *nach oben* (bzw. *unten*) *beschränkt*, falls $f(M)$ nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von N ist. Eine nach oben und unten beschränkte Funktion heißt beschränkt.

Sei nun zusätzlich auch auf M eine Ordnung gegeben. Wir bezeichnen die Ordnung auf M mit \prec_M und die auf N mit \prec_N . Dann heißt f *monoton steigend*, falls

$$\forall x, y \in M : x \prec_M y \Rightarrow f(x) \prec_N f(y)$$

und *monoton fallend*, falls

$$\forall x, y \in M : x \prec_M y \Rightarrow f(y) \prec_N f(x).$$

Eine monoton steigende bzw. fallende Funktion, die injektiv ist, heißt *streng monoton* steigend bzw. fallend. Im streng monoton steigenden Fall etwa gilt dann

$$\forall x, y \in M : x \not\prec_M y \Rightarrow f(x) \not\prec_N f(y)$$

Beispiel. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist weder monoton fallend noch monoton steigend. Es ist aber $f|_{\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}}$ streng monoton steigend und $f|_{\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}}$ streng monoton fallend.

1.6 Vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ als gegeben voraus. Wichtiges Beweismittel bei Aussagen über natürliche Zahlen ist das

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. *Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Gilt dann*

(i) $A(1)$ ist wahr

und

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Wahrheit von $A(n+1)$ aus der von $A(n)$,

so ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man nennt dabei (i) den Induktionsanfang und (ii) den Induktionsschluß (oder Induktionsschritt). Im Induktionsschluß nennt man auch $A(n)$ Induktionsvoraussetzung und $A(n+1)$ Induktionsbehauptung. Formal ausgedrückt lautet das Prinzip der vollständigen Induktion wie folgt:

$$[A(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n).$$

Beispiel. Man zeige, daß $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei dazu $A(n)$ die (für natürliche Zahlen n) erklärte Aussage

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(i) $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$. Zu zeigen ist, daß $A(n+1)$ gilt, d.h.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dies gilt aber wegen

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n + 1 \\ &\stackrel{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Ausdrücke der Form $f(m) + f(m+1) + \dots + f(n)$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n$, schreiben wir im folgenden kurz als $\sum_{k=m}^n f(k)$. Die oben bewiesene Formel lautet dann $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Eine analoge Schreibweise gilt für Produkte:

$$\prod_{k=m}^n f(k) := f(m) \cdot f(m+1) \cdot \dots \cdot f(n).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n! := \prod_{k=1}^n k$, gesprochen n Fakultät. Wir setzen außerdem $0! := 1$. Für $k, n \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq n$, setzen wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gesprochen n über k . Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen *Binomialkoeffizienten*.

Beispiel. Man zeige, daß $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang. Wegen $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2 = 2^1$ gilt die Ungleichung für $n = 1$.

Induktionsschritt. Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\binom{2n}{n} \geq 2^n$. Zu zeigen ist, daß

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2^{n+1}.$$

Dies folgt aber wegen

$$\begin{aligned} \binom{2(n+1)}{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \\ &= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &\stackrel{IV}{\geq} \frac{2(2n+1)}{n+1} 2^n \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \cdot 2^{n+1} \\ &\geq 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ wurde dabei an der mit “IV” gekennzeichneten Stelle benutzt.

Will man für gegebenes $N \in \mathbb{Z}$ Aussagen über $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$ beweisen, kann man dies durch geeignete Modifikation des obigen Prinzips tun (Induktionsanfang für $n = N$). Es ist auch möglich, im Induktionsschritt nicht nur die Gültigkeit von $A(n)$, sondern die von $A(k)$ für alle $k \leq n$ vorauszusetzen.

1.7 Körper

Wir formalisieren jetzt Addition und Multiplikation sowie ihre Eigenschaften.

Definition 1.7.1 Sei K Menge und seien $+$: $K \times K \rightarrow K$ und \cdot : $K \rightarrow K$ Funktionen (wobei wir aber im folgenden $x + y$ statt $+((x, y))$ und $x \cdot y$ oder xy statt $\cdot((x, y))$ schreiben). Das Tripel $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper* (englisch: field), falls die folgenden neun Eigenschaften gelten:

$$(A1) \quad \forall x, y \in K : x + y = y + x$$

$$(A2) \quad \forall x, y, z \in K : (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(A3) \quad \exists 0 \in K \forall x \in K : x + 0 = x$$

$$(A4) \quad \forall x \in K \exists y \in K : x + y = 0$$

$$(M1) \quad \forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$$

$$(M2) \quad \forall x, y, z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

$$(M3) \exists 1 \in K \setminus \{0\} \forall x \in K \setminus \{0\} : x \cdot 1 = x$$

$$(M4) \forall x \in K \setminus \{0\} \exists y \in K \setminus \{0\} : x \cdot y = 1$$

$$(D) \forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

Beispiele sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sowie (Menge der rationalen Funktionen, $+$, \cdot). (Eine rationale Funktion ist ein Quotient von Polynomen.) Statt “ $(K, +, \cdot)$ ist Körper” sagt man oft auch “ K ist Körper”.

Man nennt (A1)-(A4) Axiome der Addition, (M1)-(M4) Axiome der Multiplikation und (D) Distributivgesetz. (A1) und (M1) heißen Kommutativgesetze und (A2) und (M2) heißen Assoziativgesetze. Insgesamt nennt man die obigen Regeln die Körperaxiome.

Wir ziehen einige Folgerungen aus den Körperaxiomen.

Satz 1.7.1 *Die mit 0 und 1 bezeichneten Elemente sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien 0 und 0' Elemente von K mit der in (A3) geforderten Eigenschaft, d.h., $\forall x \in K : x + 0 = x$ und $\forall x \in K : x + 0' = x$. Zu zeigen ist $0 = 0'$.

Wählt man oben $x = 0'$ bzw. $x = 0$, so erhält man $0' + 0 = 0'$ bzw. $0 + 0' = 0$. Mit (A1) folgt also $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$. Analog zeigt man die Eindeutigkeit der 1. \square

Man beachte, daß zum Beweis der Eindeutigkeit der 0 lediglich (A1) und (A3) verwandt wurden. Genaugenommen sollte man diesen Beweis erst führen, bevor man (A4) formuliert. Entsprechendes gilt für (M4).

8.11.99

Satz 1.7.2 *Die in (A4) und (M4) genannten Elemente y sind eindeutig.*

Beweis. Wir beschränken uns auf (A4). Der Beweis für (M4) ist analog.

Seien $y, y' \in K$ mit $x + y = 0$ und $x + y' = 0$. Es folgt $x + y = x + y'$ und damit $y + (x + y) = y + (x + y')$. Mit (A2) folgt $(y + x) + y = (y + x) + y'$. Wegen (A1) ist aber $y + x = x + y$, also $y + x = 0$. Wir erhalten $0 + y = 0 + y'$ und damit $y = y'$. \square

Wir bezeichnen für $x \in K$ das (nach Satz 1.7.2) eindeutig bestimmte y mit $x + y = 0$ mit $-x$. Analog wird für $x \in K \setminus \{0\}$ das eindeutig bestimmte y mit $x \cdot y = 1$ mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ bezeichnet. Weiter schreiben wir auch $a - b$ statt $a + (-b)$ und $\frac{a}{b}$ oder a/b statt $a \cdot \frac{1}{b}$.

Sind $a, b \in K$, so existiert ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $a + x = b$, nämlich $x = b - a$. Analog existiert zu $a, b \in K \setminus \{0\}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $ax = b$, nämlich $x = \frac{b}{a}$. Auf den einfachen Beweis dieser Tatsachen verzichten wir.

Satz 1.7.3 *Sei K Körper, $x, y \in K$. Dann gilt: $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.*

Beweis. “ \Leftarrow ”: Wegen $xy = yx$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, daß $y = 0$ gilt. Zu zeigen ist $x \cdot 0 = 0$.

Nun ist $0 + 0 = 0$ nach (A3), nach (D) also $x0 + x0 = x(0 + 0) = x0$. Andererseits ist nach (A3) auch $x0 + 0 = x0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von $a + x = b$ folgt $x0 = 0$.

“ \Rightarrow ”: Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Zu zeigen ist, daß $y = 0$. (Wir haben eine Aussage der Form $A \Rightarrow (B \vee C)$ zu zeigen, und wir haben benutzt, daß diese äquivalent zu $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ ist.) Nun ist $y = y \cdot 1 = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = (xy)x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$. \square

Wir geben einige weitere Rechenregeln, die leicht aus den Körperaxiomen gefolgert werden können, ohne Beweis an:

$$(i) \quad \forall x \in K : -(-x) = x$$

$$(ii) \quad \forall x \in K \setminus \{0\} : (x^{-1})^{-1} = x$$

$$(iii) \quad \forall x, y \in K : -(x + y) = (-x) + (-y)$$

$$(iv) \quad \forall x, y \in K \setminus \{0\} : (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

$$(v) \quad \forall x, y \in K : (-x)y = -(xy) = x(-y)$$

Auch einige Rechenregeln, die hier nicht explizit aufgeführt sind, werden im weiteren benutzt werden.

Es sei eine Menge K mit einer “Verknüpfung” $+$ gegeben. Gelten dann (A1)-(A4), so heißt das Paar $(K, +)$ *kommutative Gruppe* (oder *abelsche Gruppe*).

Ist $(K, +, \cdot)$ Körper, so ist also $(K, +)$ kommutative Gruppe. Aus (M1)-(M4) folgt, daß auch $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe ist. Ist umgekehrt $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppe, so folgen hieraus nicht unmittelbar (M1) und (M2), da dort ja auch $x = 0$, $y = 0$ oder $z = 0$ zugelassen ist. Setzt man aber voraus, daß $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen sind und daß (D) gilt, so folgt wie im Beweis von Satz 1.7.3, daß (M1) und (M2) auch dann gelten, wenn ein Faktor 0 ist. Damit erhält man, daß $(K, +, \cdot)$ genau dann ein Körper ist, wenn $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ kommutative Gruppen sind und (D) gilt. Dies macht die Körperaxiome einprägsamer. Körper und (kommutative) Gruppen sind Beispiele für algebraische Strukturen. Eine genauere Untersuchung dieser und anderer Strukturen wie Ring, Halbgruppe, Schiefkörper, Vektorraum, usw. findet in der (linearen) Algebra statt.

Wir notieren hier noch, daß $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *Integritätsbereich* heißt, falls alle Körperaxiome bis auf (M4) gelten und außerdem noch

$$\forall x, y \in K : xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

gilt. Die letzte Eigenschaft nennt man *Nullteilerfreiheit*. Für Körper wurde sie mit Hilfe von (M4) in Satz 1.7.3 gezeigt. Beispiel eines Integritätsbereichs ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Exkurs: Konstruktion der rationalen Zahlen. Wir skizzieren, wie man den Integritätsbereich $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ zu einem Körper erweitern kann. Dazu betrachten wir die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ durch $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$ definierte Relation \sim . Die Idee dabei ist, (a, b) mit dem Bruch $\frac{a}{b}$ zu identifizieren.

Zunächst zeigen wir, daß \sim Äquivalenzrelation ist. Um etwa die Transitivität zu zeigen, sei $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$. Es ist dann $ad = bc$ und $cf = de$. Zu zeigen ist $(a, b) \sim (e, f)$, also $af = be$. Nun ist aber $(af - be)d = afd - bed = (ad)f - (de)b = (bc)f - (cf)b = 0$. Wegen $d \neq 0$ und Nullteilerfreiheit folgt $af = be$.

Als nächstes definiert man auf der Menge der Äquivalenzklassen $[(a, b)]$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(ad + bc, bd)]$$

und

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(a \cdot b, c \cdot d)].$$

Zunächst muß man jetzt zeigen, daß diese Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen *wohldefiniert* ist, d.h., nicht von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen abhängt.

Sei dazu $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$, d. h., $ab' = ba'$ und $cd' = dc'$. Dann ist

$$\begin{aligned} (ad + bc)b'd' &= adb'd + bcb'd' \\ &= ab'dd' + cd'bb' \\ &= ba'dd' + dc'bb' \\ &= bd(a'd' + b'c') \end{aligned}$$

also $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$. Analog (aber einfacher) zeigt man die Wohldefiniertheit der Multiplikation von Äquivalenzklassen.

11.11.99

Schließlich zeigt man, daß die Menge der Äquivalenzklassen mit der so definierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet, d.h., $(\{[(a, b)] : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}, +, \cdot)$ ist Körper.

Beispielsweise folgt (A1) da $[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] = [(cb + da, db)] = [(c, d)] + [(a, b)]$. Die anderen Körperaxiome sind ebenfalls leicht nachzurechnen. Dabei ist $[(0, 1)]$ das Nullelement und $[(1, 1)]$ das Einselement, $-[(a, b)] = [(-a, b)]$ und $[(a, b)]^{-1} = [(b, a)]$. Wie bezeichnen den erhaltenen Körper mit $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und nennen ihn Körper der rationalen Zahlen.

Man kann eine ganze Zahl n mit der Äquivalenzklasse $[(n, 1)]$ identifizieren. Denn es gilt $[(n, a)] + [(m, 1)] = [(n + m, 1)]$ und $[(n, 1)] \cdot [(m, 1)] = [(n \cdot m, 1)]$ für $m, n \in \mathbb{Z}$. In diesem Sinne ist \mathbb{Z} in \mathbb{Q} enthalten.

Für eine formale Beschreibung dieses Sachverhalts betrachtet man die Funktion $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $n \mapsto [(n, 1)]$. Dann gilt $i(n + m) = i(n) + i(m)$ und $i(n \cdot m) = i(n) \cdot i(m)$. Außerdem ist i injektiv.

Bemerkungen. 1. Mit dem oben angegebenen Verfahren kann man jeden Integritätsbereich zu einem Körper erweitern. Ein weiteres Beispiel ist etwa durch den Integritätsbereich der Polynome gegeben, der zum Körper der rationalen Funktionen erweitert werden kann.

2. Auf ähnliche Weise kann man \mathbb{Z} aus \mathbb{N} konstruieren. Später werden wir \mathbb{R} aus \mathbb{Q} konstruieren. Insgesamt wird so \mathbb{R} über \mathbb{Z} und \mathbb{Q} aus \mathbb{N} konstruiert. Zuvor geben wir aber eine axiomatische Beschreibung von \mathbb{R} .

Definition 1.7.2 Sei $(K, +, \cdot)$ Körper und sei \leq Ordnung auf K , d.h., (K, \leq) ist geordnete Menge. Dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ *angeordneter Körper*, falls gilt:

$$(O1) \quad \forall x, y, z \in K : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z,$$

$$(O2) \quad \forall x, y \in K : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy.$$

Man nennt (O1) und (O2) die *Ordnungsaxiome*.

Beispiele angeordneter Körper sind \mathbb{Q} und \mathbb{R} . (Wir schreiben statt $(K, +, \cdot, \leq)$ oft wieder nur K .)

Sei K angeordneter Körper. Wir schreiben wieder $x < y$ oder $y > x$ statt $(x \leq y \wedge x \neq y)$ und auch $y \geq x$ statt $x \leq y$. Wir nennen $x \in K$ *positiv* falls $x > 0$ und *negativ* falls $x < 0$.

Aus den Körper- und Ordnungsaxiomen (und den Eigenschaften der Ordnung) erhält man die folgenden Regeln. Dabei sind $x, y, u, v, a \in K$.

- (i) $x \leq y \Leftrightarrow x - y \leq 0 \Leftrightarrow y - x \geq 0$,
- (ii) $x \leq y \wedge u \leq v \Rightarrow x + u \leq y + v$,
- (iii) $a \geq 0 \wedge x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$,
- (iv) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,
- (v) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$,
- (vi) $x^2 \geq 0$,
- (vii) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$,
- (viii) $1 > 0$,
- (ix) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$,
- (x) $x > y > 0 \Rightarrow (y^{-1} > x^{-1}) \wedge (xy^{-1} > 1)$.

Dabei ist in (vi) natürlich $x^2 := x \cdot x$. Allgemeiner ist $x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis von (i) braucht man nur (O1) mit $z = -y$ bzw. $z = -x$ verwenden. Regel (ii) folgt durch zweimalige Anwendung von (O1) und (A1):

$$x + u \leq y + u = u + y \leq v + y = y + v.$$

Um (iii) zu zeigen, beachten wir zunächst, daß $y - x \geq 0$ nach (i). Mit (O2) folgt $a(y - x) \geq 0$, also $ay - ax \geq 0$ wegen (D). Mit (i) folgt schließlich $ax \leq ay$.

Wir verzichten auf die (einfachen) Beweise von (iv)-(x). Es gibt auch noch viele weitere Rechenregeln, die wir gelegentlich benutzen werden, aber hier nicht ausdrücklich aufführen.

Wir definieren für $x \in K$

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und nennen $|x|$ den *Betrag* von x . Für $x, y \in K$ gelten dann die folgenden Rechenregeln:

- (i) $|x| \geq 0$
- (ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$(iii) \quad |x| \geq x$$

$$(iv) \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$(v) \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(vi) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Regel (v) heißt *Dreiecksungleichung*. Zu ihrem Beweis beachte man, daß $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ nach (iii). Es folgt $x + y \leq |x| + |y|$. Weiter ist $-x \leq |-x| = |(-1) \cdot x| = |-1| \cdot |x| = -(-1) \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$ und analog $-y \leq |y|$. Wir erhalten $-(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$. Insgesamt folgt $x + y \leq |x + y|$ und $-(x + y) \leq |x| + |y|$. Hieraus folgt die Behauptung. (Wir haben (iii) im Beweis von (v) benutzt. Natürlich muß man sich noch überzeugen, daß (iii) ohne Zuhilfenahme von (v) bewiesen werden kann, aber dies ist leicht zu sehen.)

Definition 1.7.3 Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, \leq)$ heißt *vollständig*, falls die geordnete Menge (K, \leq) ordnungsvollständig ist.

In einem vollständigen angeordneten Körper besitzt also jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum. Das Supremum läßt sich in Körpern auch wie folgt charakterisieren.

Satz 1.7.4 Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ angeordneter Körper und A nach oben beschränkte Teilmenge von K . Sei s eine obere Schranke A . Dann ist s Supremum von A genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ existiert, so daß $s - \varepsilon < x$, d.h.

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : s - \varepsilon < x.$$

Beweis: “ \Rightarrow ”: Wir führen den Beweis indirekt (genauer: durch Kontraposition) und nehmen an, daß (*) nicht gilt. Es folgt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in A : s - \varepsilon \geq x,$$

d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \text{ ist obere Schranke von } A.$$

Da aber $s - \varepsilon < s$ falls $\varepsilon > 0$, ist s also kein Supremum von A .

“ \Leftarrow ”: Es gelte (*) und es sei s' obere Schranke von A . Zu zeigen ist, daß $s' \geq s$. Wir nehmen an, daß dies nicht gilt. Dann ist $s' < s$ und damit $\varepsilon := s - s' > 0$. Nach (*) existiert $x \in A$ mit $x > s - \varepsilon = s'$. Dies ist ein Widerspruch, da s' obere Schranke von A .

15.11.99

1.8 Reelle Zahlen

Grundlegend für die Analysis ist das folgende Resultat.

Satz 1.8.1 *Es gibt einen vollständigen angeordneten Körper.*

Wir werden später einen Beweis dieses Satzes skizzieren, indem wir andeuten werden, wie man den angeordneten Körper der rationalen Zahlen “vervollständigen” kann. Den so erhaltenen vollständigen angeordneten Körper nennen wir den *Körper der reellen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, kurz auch \mathbb{R} .

Darüberhinaus kann man sogar zeigen, daß die reellen Zahlen im wesentlichen der einzige vollständige angeordnete Körper sind: ist $(K, +_K, \cdot_K, \leq_K)$ ein vollständiger angeordneter Körper, so existiert eine bijektive Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x +_K y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot_K y) = f(x) \cdot f(y)$ und $x \leq_K y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in K$. Wir verzichten hier auf einen Beweis dieser Tatsache. Stattdessen entwickeln wir die Theorie des vollständigen angeordneten Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ anhand der in §1.7 gegebenen Körper- und Ordnungsaxiome sowie der Vollständigkeit. Dabei betrachten wir \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{Q} als Teilmengen von \mathbb{R} :

$$n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}}, \quad \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}.$$

Satz 1.8.2 \mathbb{N} ist nicht nach oben beschränkt (in \mathbb{R}).

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß \mathbb{N} nach oben beschränkt ist. Sei $s = \sup \mathbb{N}$. Dann gilt $n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.7.4 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > s - 1$. Es folgt $N + 1 > s$. Dies ist ein Widerspruch, da $N + 1 \in \mathbb{N}$. \square

Folgerung 1.8.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.

Beweis. Andernfalls gilt $na \leq b$ und damit $n \leq b/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu Satz 1.8.2. \square

Folgerung 1.8.2 Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < a$.

Beweis. Man wende Folgerung 1.8.1 mit $b = 1$ an. \square

Satz 1.8.2 und die beiden Folgerungen daraus heißen *Satz des Archimedes* oder *Satz des Eudoxos*; die Bezeichnungen sind hier uneinheitlich.

Satz 1.8.3 Es sei $M \subset \mathbb{Z}$, $M \neq \emptyset$. Weiter sei M nach oben (bzw. unten) beschränkt. Dann hat M ein Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, daß M nach unten beschränkt ist. Der andere Fall ist analog. Weiter kann man annehmen, daß $M \subset \mathbb{N}$ gilt, daß also 1 untere Schranke von M ist. (Denn ist $M \subset \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}$ untere Schranke, so betrachten wir $M' := \{n - s + 1 : n \in M\}$. Dann ist $M' \subset \mathbb{N}$ und ist μ Minimum von M' , so ist $\mu + s - 1$ Minimum von M .)

Wir betrachten die Menge A aller natürlichen Zahlen, die untere Schranke von M sind, also $A = \{n \in \mathbb{N} : (\forall m \in M : n \leq m)\}$. Dann ist $1 \in A$ wegen $M \subset \mathbb{N}$. Andererseits ist A nach oben beschränkt, da jedes Element von M obere Schranke von A ist. Nach Satz 1.8.2 gilt damit $A \neq \mathbb{N}$.

Damit existiert aber $k \in \mathbb{N}$, so daß $k \in A$ und $k+1 \notin A$. Denn andernfalls würde für alle $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $k \in A$ die Aussage $k+1 \in A$ implizieren, aufgrund des

Beweisprinzips der vollständigen Induktion also $A = \mathbb{N}$ gelten. Formal sieht dieser Schluß wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 & \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k \in A \wedge k + 1 \notin A) \\
 \Leftrightarrow & \forall k \in \mathbb{N} : \neg(k \in A \wedge k + 1 \notin A) \\
 \Leftrightarrow & \forall k \in \mathbb{N} : k \notin A \vee k + 1 \in A \\
 \Leftrightarrow & \forall k \in \mathbb{N} : k \in A \Rightarrow k + 1 \in A \\
 \stackrel{1 \in A}{\Rightarrow} & A = \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Sei nun also $k \in A$ mit $k + 1 \notin A$. Dann ist k untere Schranke von M wegen $k \in A$. Wegen $k + 1 \notin A$ existiert $m \in M$ mit $m < k + 1$. Da aber auch $k \leq M$ gilt, und zwischen k und $k + 1$ keine natürliche Zahl liegt, folgt $k = m$, also $k \in M$. Damit ist k Minimum von M . \square

Wir haben im Beweis die Behauptung auf die folgende Aussage reduziert: *jede nichtleere Teilmenge von \mathbb{N} besitzt ein Minimum*. Hierzu sagt man auch: \mathbb{N} ist wohlgeordnet.

Den folgenden Satz drückt man auch mit den Worten “ \mathbb{Q} is dicht in \mathbb{R} ” aus.

Satz 1.8.4 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis. Es ist $b - a > 0$ und damit existiert nach Folgerung 1.8.2 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Wir betrachten die Menge $M := \{k \in \mathbb{Z} : k > na\}$. Nach Satz 1.8.2 gilt dann $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M nach unten (durch na) beschränkt. Nach Satz 1.8.3 hat M also ein Minimum m . Es gilt dann $m > na$ und damit $a < \frac{m}{n}$. Außerdem ist $m - 1 \leq na$ und damit $m \leq na + 1$, also $\frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$. Also leistet $r := \frac{m}{n}$ das Verlangte. \square

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heißen

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *offenes Intervall*,
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall*,
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ und $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *halboffene Intervalle*.

Bei Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ setzen wir formal $b = \infty$ und bezeichnen auch sie als offenes Intervall, also $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Analog definiert man das offene Intervall $(-\infty, b)$ sowie die abgeschlossenen Intervalle $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$. Wir bezeichnen $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ sowohl als offenes Intervall wie auch als abgeschlossenes Intervall. Weiter setzen wir noch $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$.

Man beachte, daß wir für offene Intervalle und geordnete Paare die gleiche Notation verwenden! Dies sollte aber nicht zu Mißverständnissen führen. Eine andere übliche Notation für das offene Intervall (a, b) ist $]a, b[$, mit einer analogen Notation für halboffene Intervalle.

In der jetzt eingeführten Terminologie lautet Satz 1.8.4 etwa: Ist I offenes Intervall, so gilt $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

18.11.99

Satz 1.8.5 *\mathbb{Q} ist nicht vollständig.*

Beweis. Sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ (etwa $0 \in M$) und M ist nach oben beschränkt (etwa durch 2). Wir nehmen an, daß \mathbb{Q} vollständig ist. Dann besitzt M ein Supremum $s \in \mathbb{Q}$. Wegen $0 \in M$ gilt $s \geq 0$.

Wir zeigen zunächst, daß $s^2 = 2$ gilt. Dazu nehmen wir an, daß $s^2 < 2$. Dann ist $m := \min\{\frac{2-s^2}{2s+1}, 1\} > 0$ und nach Satz 1.8.4 existiert $r \in (s, s+m) \cap \mathbb{Q}$. Es folgt

$$r^2 < (s+m)^2 = s^2 + 2sm + m^2 \leq s^2 + 2sm + m \leq s^2 + 2s \frac{2-s^2}{2s+1} + \frac{2-s^2}{2s+1} = s^2 = 2,$$

also $r \in M$ und $s < r$, im Widerspruch zu $s = \sup M$. Ähnlich führt man $s^2 > 2$ zum Widerspruch. Es gilt also $s^2 = 2$.

Wegen $s \in \mathbb{Q}$ existieren $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, mit $s = \frac{p}{q}$. Man kann annehmen, daß p und q teilerfremd sind, insbesondere also, daß p und q nicht beide gerade sind. Wegen $2 = s^2 = \frac{p^2}{q^2}$ gilt $p^2 = 2q^2$. Dies impliziert, daß p^2 gerade ist. Damit ist aber auch p gerade, etwa $p = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt, daß $2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2$, also $q^2 = 2n^2$. Dies impliziert aber, daß q^2 und damit q gerade ist. Dies ist ein Widerspruch. \square

Bemerkung. Die Menge M aus dem obigen Beweis besitzt wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} ein Supremum $s \in \mathbb{R}$, und das obige Argument zeigt, daß $s^2 = 2$ gilt. Wir bezeichnen diese reelle Zahl s natürlich mit $\sqrt{2}$.

Diese Idee benutzt man allgemeiner zur Definition rationaler Potenzen.

Definition 1.8.1 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_+$. Man setzt

$$\sqrt[n]{a} := \sup\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}, \quad a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

sowie $a^0 := 1$ und $\sqrt[n]{a} := \sqrt[n]{a}$.

Ähnlich wie im Beweis von Satz 1.8.5 zeigt man $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Darüberhinaus sieht man leicht, daß $\sqrt[n]{a}$ die einzige positive reelle Zahl ist, deren n -te Potenz a ist, d. h., $\{x \in \mathbb{R} : x^n = a\} = \{\sqrt[n]{a}\}$. Desweiteren zeigt man leicht, daß $a^{\frac{m}{n}}$ wohldefiniert ist, d. h., daß für $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ auch $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$ gilt.

Satz 1.8.6 Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

- (i) $a^r a^s = a^{r+s}$,
- (ii) $(a^r)^s = a^{rs}$,
- (iii) $(ab)^r = a^r b^r$,
- (iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$,
- (v) $a < b \wedge r > 0 \Rightarrow a^r < b^r$ und $a < b \wedge r < 0 \Rightarrow a^r > b^r$,
- (vi) $r < s \wedge a > 1 \Rightarrow a^r < a^s$ und $r < s \wedge a < 1 \Rightarrow a^r > a^s$.

Der Beweis sei als Übung überlassen. Man kann die Idee in Definition 1.8.1 auch benutzen, um die Potenz a^x für $a \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ durch $a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r \leq x\}$ zu definieren. Wir werden dies später (in §2.5) auf etwas anderem Wege tun.

Mit Hilfe der folgenden Definition werden wir einen weiteren wichtigen Unterschied zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{R} beschreiben.

Definition 1.8.2 Es sei M Menge, $M \neq \emptyset$.

- M heißt *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion (d. h., eine bijektive Abbildung) $\phi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ gibt.
- M heißt *abzählbar*, falls es eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt.
- M heißt *höchstens abzählbar*, falls M endlich oder abzählbar ist.
- M heißt *überabzählbar*, falls M nicht endlich oder abzählbar ist.

Satz 1.8.7 \mathbb{Q} ist abzählbar.

Beweisskizze. Wir beginnen mit 0, durchlaufen die Zahlen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ wie in dem folgenden Schema angedeutet und fügen die Zahl $-\frac{m}{n}$ hinter $\frac{m}{n}$ ein.

	1		2		3		4	...
1	1	→	2		3	→	4	...
		↙		↗		↙		
2	$\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2	
	↓	↗		↙		↗		
3	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1		$\frac{4}{3}$	
		↙		↗				
4	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		1	
	↓	↗						
5	$\frac{1}{5}$		$\frac{2}{5}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{5}$	
...	...							

Bereits einmal durchlaufene Zahlen lassen wir weg und kommen so zu folgender Anordnung der rationalen Zahlen:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, \dots$$

Die durch $\phi(1) = 0, \phi(2) = 1, \phi(3) = -1, \phi(4) = 2, \dots$ definierte Funktion $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist dann bijektiv. \square

Satz 1.8.8 \mathbb{R} ist überabzählbar.

Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir folgendes Resultat.

Satz 1.8.9 Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I(n)$ gegeben, d. h., es sei I eine Abbildung von \mathbb{N} in die Menge der beschränkten, abgeschlossenen Intervalle. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I(n+1) \subset I(n)$. Dann gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset.$$

Der Beweis sei als Übung überlassen. (In der Formulierung des Satzes ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n)$ eine abkürzende Schreibweise für $\bigcap_{I \in \{I(n)\}} I$. Entsprechende Schreibweisen werden wir im folgenden häufiger benutzen.)

Oft wird die in Satz 1.8.9 angegebene Eigenschaft auch als Definition der Vollständigkeit genommen (anstelle der Eigenschaft, daß jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt). Dies führt aber zu einem anderen Vollständigkeitsbegriff, und zur Charakterisierung von \mathbb{R} muß dann noch eine der Aussagen von Satz 1.8.2, Folgerung 1.8.1 oder Folgerung 1.8.2 hinzugenommen werden. Die hinzugenommene Aussage wird dann als *Archimedisches Axiom* bezeichnet.

Beweis von Satz 1.8.8. Sei $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall $I(1)$ mit $\phi(1) \notin I(1)$. Weiter existiert ein abgeschlossenes Intervall $I(2) \subset I(1)$ mit $\phi(2) \notin I(2)$. Induktiv erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ein abgeschlossenes Intervall $I(n) \subset I(n-1)$ mit $\phi(n) \notin I(n)$. Nach Satz 1.8.9 ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset$ und damit existiert $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I(n)$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit $s \in I(n)$, wegen $\phi(n) \notin I(n)$ also $s \neq \phi(n)$. Es folgt $s \notin \phi(\mathbb{N})$. Daher ist ϕ nicht surjektiv. \square

22.11.99

1.9 Komplexe Zahlen

Die Idee ist, den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen so zu erweitern, daß Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung haben. Ist etwa i eine Lösung dieser Gleichung, also $i^2 = -1$, so kann man Elemente der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten. Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erhält man, wenn man die üblichen Rechenregeln als gegeben hinnimmt, und zusätzlich die Regel $i^2 = -1$ benutzt, dann $(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2 bd = ac - bd + i(ad + bc)$.

Formal geht man wie folgt vor: auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir eine Addition “+” und eine Multiplikation “ \cdot ” wie folgt:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Es gilt dann, daß $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ Körper ist. Dabei ist $(0, 0)$ das Nullelement und $(1, 0)$ das Einselement.

Wir verzichten darauf, alle Körperaxiome nachzuweisen, sondern beschränken uns exemplarisch auf zwei, nämlich (M4) (Existenz des multiplikativen Inversen) und (D) (Distributivgesetz).

Nachweis von (M4). Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$. Dann ist $a^2 + b^2 > 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right) &= \left(a \frac{a}{a^2 + b^2} - b \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Nachweis von (D). Seien $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 ((a, b) + (c, d)) \cdot (e, f) &= (a + c, b + d) \cdot (e, f) \\
 &= ((a + c)e - (b + d)f, (a + c)f + (b + d)e) \\
 &= (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de) \\
 &= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) \\
 &= (a, b) \cdot (e, f) + (c, d) \cdot (e, f)
 \end{aligned}$$

Wir nennen den erhaltenen Körper den Körper der *komplexen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ oder kurz auch \mathbb{C} . (Es gilt also $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2!$)

Weiter zeigt man leicht, daß $(\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}, +, \cdot)$ ein Teilkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist. Dieser Teilkörper ist "isomorph" zum Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, denn die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}, a \mapsto (a, 0)$ ist bijektiv und erfüllt $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ und $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

Wir identifizieren daher die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a, 0)$ und betrachten in diesem Sinne die reellen Zahlen als Teilmenge von \mathbb{C} . Weiter setzen wir $i := (0, 1)$. Es gilt dann $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ und $i \cdot a = (0, 1) \cdot (a, 0) = (0, a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Damit ist $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Im allgemeinen schreiben wir komplexe Zahlen in der letzten Form.

Wir führen einige weitere Bezeichnungen ein. Dazu seien $x, y \in \mathbb{R}$ und damit $z := (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$. Wir nennen x den *Realteil* von z und y den *Imaginärteil* von z . Dafür benutzen wir die Notation $x = \operatorname{Re} z$ und $y = \operatorname{Im} z$.

Weiter heißt $\bar{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl* und $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der Betrag von z . (Man beachte, daß für $z \in \mathbb{R}$ der hier definierte Betrag mit dem vorher definierten übereinstimmt.) Wir stellen einige Rechenregeln zusammen, die für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten.

- (i) $|z| \geq 0$
- (ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- (iii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- (iv) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
- (v) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$
- (vi) $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$
- (vii) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- (viii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- (ix) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}$
- (x) $|\bar{z}| = |z|$
- (xi) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$
- (xii) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

$$(xiii) \quad |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$(xiv) \quad |z + w| \leq |z| + |w| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

$$(xv) \quad ||z| - |w|| \leq |z - w|$$

Wir beweisen hier nur einige der obigen Rechenregeln. Dazu sei $z = x + iy$ und $w = u + iv$, mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.

zu (iv):

$$\begin{aligned} \overline{z\overline{w}} &= \overline{(x + iy)(u + iv)} \\ &= \overline{xu - yv + i(xv + yu)} \\ &= xu - yv - i(xv + yu) \\ &= xu - (-y)(-v) + i(x(-v) + (-y)u) \\ &= (x - iy)(u - iv) \\ &= \overline{z} \overline{w} \end{aligned}$$

$$\text{zu (viii): } z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

zu (xiii): Nach den gerade bewiesenen Rechenregeln ist

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$$

und damit $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

zu (xiv): Es ist

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} \\ &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

und damit $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Identifizieren wir die komplexe Zahl $z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Punkt der Ebene mit Koordinaten x und y , so können wir die Addition komplexer Zahlen geometrisch deuten. Sie entspricht der Addition von Vektoren.

Auch die Multiplikation komplexer Zahlen kann geometrisch gedeutet werden. Dies wird erst später erfolgen.

Satz 1.9.1 Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$.

Beweis. Ist $w \in \mathbb{R}$, $w \leq 0$, so hat $z = i\sqrt{-w}$ die gewünschte Eigenschaft. Andernfalls gilt $|w| + \operatorname{Re} w > 0$ und (zur Übung empfohlenes!) Nachrechnen zeigt, daß

$$z = \frac{|w| + w}{\sqrt{2}\sqrt{|w| + \operatorname{Re} w}}$$

die geforderte Eigenschaft hat. \square

Allgemeiner zeigt man (durch quadratische Ergänzung), daß für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ eine Lösung hat. Noch allgemeiner gilt der folgende Satz.

Satz 1.9.2 (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei p ein Polynom vom Grad n , das heißt, es existieren $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so daß $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann existiert $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$.

Einen *Beweis* dieses Satzes lernt man z. B. in einer Einführung in die Funktionentheorie kennen, wie sie i. a. in der Analysis IV geboten wird.

Sind p und z_1 wie in Satz 1.9.2, so existiert ein Polynom vom Grad $n - 1$, so daß $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Ist $n \geq 2$, so kann Satz 1.9.2 auf p_1 angewendet werden, und induktiv erhält man, daß $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ existieren, so daß $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$.

Satz 1.9.3 Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kann nicht angeordnet werden.

Beweis. Es sei \leq Ordnung und $<$ die zugehörige strikte Ordnung. Dann ist $0 < i^2 = -1$ und $0 < 1^2 = 1$. Es folgt $0 < -1 + 1 = 0$. Widerspruch! \square

25.11.99

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1.1 Eine Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{N} heißt *Folge*. Falls außerdem der Zielbereich \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist, heißt sie (reelle bzw. komplexe) *Zahlenfolge*.

Sei M Menge und $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir statt $f(n)$ im allgemeinen f_n . Wir bezeichnen die Folge f mit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz auch einfach mit (f_n) . Gelegentlich schreiben wir auch (f_1, f_2, f_3, \dots) .

Jede reelle Zahlenfolge kann auch als komplexe Zahlenfolge betrachtet werden.

Manchmal werden wir für ein $N \in \mathbb{Z}$ und eine Menge M auch Funktionen $f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} \rightarrow M$ betrachten. Wir werden auch diese (Zahlen)folgen nennen und mit $(f_n)_{n \geq N}$ bezeichnen.

Begriffe wie "injektiv" sind, da sie für Funktionen definiert sind, insbesondere auch für Folgen erklärt. Begriffe wie "(nach oben/unten) beschränkt" oder "(streng) monoton fallend/steigend" definiert man für reelle Zahlenfolgen, indem man auf \mathbb{N} und \mathbb{R} die Ordnung " \leq " zugrunde legt.

Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt, falls die reelle Zahlenfolge $(|a_n|)$ beschränkt ist. (Dabei kommt es natürlich nur darauf an, daß $(|a_n|)$ nach oben beschränkt ist, denn nach unten ist diese Folge immer durch 0 beschränkt).

Beispiel. Wir betrachten die reelle Zahlenfolge (a_n) wobei $a_n = \frac{n+1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $(a_n) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots)$.

Behauptung 1. (a_n) ist monoton fallend.

Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Zu zeigen ist, daß $a_n \leq a_m$. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} & a_n \leq a_m \\ \Leftrightarrow & \frac{n+1}{n} \leq \frac{m+1}{m} \\ \Leftrightarrow & (n+1)m \leq (m+1)n \\ \Leftrightarrow & nm + m \leq mn + n \\ \Leftrightarrow & m \leq n. \quad \square \end{aligned}$$

Genauso sieht man, daß (a_n) sogar streng monoton fallend ist.

Behauptung 2. (a_n) ist beschränkt.

Beweis. (i) Da (a_n) monoton fallend ist, gilt $a_n \leq a_1 = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist 2 obere Schranke von (a_n) und damit ist (a_n) nach oben beschränkt.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n+1 > n$, also $a_n = \frac{n+1}{n} > 1$. Also ist 1 untere Schranke von (a_n) und damit ist (a_n) nach unten beschränkt.

Aus (i) und (ii) folgt, daß (a_n) beschränkt ist. \square

Im obigen Beispiel ist a_n nahe dem Wert 1, wenn n groß ist. Wir präzisieren diesen Gedanken in der folgenden Definition.

Definition 2.1.2 Sei (a_n) (komplexe) Zahlenfolge. Dann heißt (a_n) *konvergent*, falls $a \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wir schreiben in diesem Falle $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a_n \rightarrow a$ (für $n \rightarrow \infty$) und sagen, daß (a_n) gegen a konvergiert. Wir nennen a den *Grenzwert* der Folge (a_n) .

Eine Zahlenfolge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Es ist nützlich, die Definition der Konvergenz noch einmal mit Quantoren zu schreiben. Es ist (a_n) konvergent, falls gilt:

$$\exists a \in \mathbb{C} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Idee bei der Definition der Konvergenz ist, $|a_n - a|$ als Abstand von a_n zu a zu interpretieren. Dieser Abstand kann dann im Konvergenzfall beliebig klein gemacht werden, indem man n groß wählt.

Dieser Gedanke kann wesentlich verallgemeinert werden. So werden wir später in recht allgemeinem Rahmen einen Abstandsbegriff (Metrik) definieren, und Konvergenz von Folgen in mit diesem Abstandsbegriff versehene Mengen (metrische Räume) untersuchen.

Beispiel (Fortsetzung). Sei wieder $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Behauptung. (a_n) ist konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, daß ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wir behaupten, daß $N := \lceil 1/\varepsilon \rceil + 1$ die verlangte Eigenschaft hat. (Es sei daran erinnert, daß für eine reelle Zahl x mit der Gaußklammer $\lceil x \rceil$ die größte ganze Zahl bezeichnet wird, die nicht größer als x ist.) Zunächst ist dann $N > 1/\varepsilon$ und damit $1/N < \varepsilon$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Dann ist

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n+1-n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

Im folgenden werden wir statt “ (a_n) ist konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ” oft nur kurz “ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ” schreiben. Wenn wir also den Grenzwert angeben, wird damit seine Existenz (also die Konvergenz) impliziert.

Eine andere Beschreibung des Konvergenzbegriffs erhält man wie folgt. Sei $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$, $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann heißt $\{x \in X : |x - a| < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung von a (in X). Geometrisch ist die ε -Umgebung von a im Falle $X = \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe vom Radius ε um a und im Falle $X = \mathbb{R}$ ein offenes Intervall der Länge 2ε um a . Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von a , wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so daß die ε -Umgebung von a in U enthalten ist.

Es zeigt sich, daß (a_n) genau dann gegen a konvergiert, wenn für jede Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $a_n \in U$ für $n \geq N$.

Der Begriff der Umgebung läßt sich in noch allgemeineren Zusammenhängen erklären als der der Metrik. Insofern ist die Beschreibung der Konvergenz über Umgebungen stärker verallgemeinerungsfähig als die in Definition 2.1.1 gegebene. Solche Fragen werden in der *Topologie* behandelt.

29.11.99

Wir haben bei einer konvergenten Folge bereits von *dem* Grenzwert und nicht nur von *einem* Grenzwert gesprochen. Dies wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.1.1 *Eine konvergente Zahlenfolge hat genau einen Grenzwert.*

Beweis. Die Existenz eines Grenzwertes folgt aus der Definition. Wir haben also nur die Eindeutigkeit des Grenzwertes zu zeigen.

Dazu nehmen wir an, daß a und b Grenzwerte der konvergenten Zahlenfolge (a_n) seien, mit $a \neq b$. Dann ist $|a - b| > 0$ und mit $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ auch $\varepsilon > 0$.

Nach Definition 2.1.1 existiert nun $N_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und es existiert $N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann

$$|a - b| = |(a - a_N) + (a_N - b)| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Dies ist ein Widerspruch. \square

Zur Übung führen wir denselben Beweis in der Terminologie der Umgebungen: Seien a, b, ε wie vorher. Dann sind die ε -Umgebungen von a und b disjunkt, denn ist x aus beiden Umgebungen, so gilt

$$|a - b| = |(a - x) + (x - b)| \leq |a - x| + |x - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Damit kann jedes a_n nur in höchstens einer dieser Umgebungen liegen, womit nur eine der Zahlen a und b Grenzwert von (a_n) sein kann.

Satz 2.1.2 *Eine konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge und sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$. (Wir haben in Definition 2.1.2 $\varepsilon := 1$ gewählt.) Damit folgt für $n \geq N$, daß

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Mit $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$ folgt dann $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Beispiel 1. Es sei $q \in \mathbb{C}$ und die komplexe Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch $a_n = q^n$.

Fall 1. $|q| > 1$. Wir zeigen, daß (a_n) unbeschränkt und damit wegen Satz 2.1.2 divergent ist.

Sei dazu $M \in \mathbb{R}_+$. Wir haben zu zeigen, daß $n \in \mathbb{N}$ mit $|q^n| > M$ existiert. Dazu setzen wir $h := |q| - 1$. Dann ist $h > 0$ und $|q| = 1 + h$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist dann $|q^n| = |q|^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh \geq nh$. Für $n > M/h$ folgt also $|a_n| \geq nh > M$.

Fall 2. $|q| < 1$. Wir zeigen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir haben zu zeigen, daß $N \in \mathbb{N}$ mit $|q^n - 0| < \varepsilon$ für $n \geq N$ existiert. Dies ist klar falls $q = 0$. Sei also $q \neq 0$. Wir setzen $h := \frac{1}{|q|} - 1$. Es ist dann $|q| = \frac{1}{1+h}$. Wegen $\frac{1}{|q|} > 1$ ist $h > 0$. Wählt man $N > \frac{1}{\varepsilon h}$, so folgt für $n \geq N$, daß

$$|q^n - 0| = |q|^n = \left(\frac{1}{1+h} \right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{Nh} < \varepsilon.$$

Fall 3. $|q| = 1$. Hier zeigt sich, daß für $q = 1$ Konvergenz gegen 1 vorliegt, während die Folge für $q \neq 1$ divergent ist. Wir verzichten hier auf die Details.

Beispiel 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, daß ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für $n \geq N$ existiert.

Dazu notieren wir zunächst, daß offensichtlich $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt also $h_n \geq 0$. Für $n \geq 2$ folgt

$$n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + h_n)^n = 1 + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \dots \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Es gilt also $h_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ und damit $h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ für $n \geq 2$. Wählt man also $N > \max\{2, \frac{2}{\varepsilon^2} + 1\}$, so folgt für $n \geq N$, daß

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |h_n| = h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{N-1}} < \sqrt{\frac{2}{(\frac{2}{\varepsilon^2} + 1) - 1}} = \varepsilon. \quad \square$$

2.2 Rechenregeln

Satz 2.2.1 Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$. Sei $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- (i) $(a_n + b_n)$ ist konvergent und $a_n + b_n \rightarrow a + b$,
- (ii) $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$,
- (iii) $(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a$,
- (iv) Ist $b \neq 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, daß $b_n \neq 0$ für $n \geq N$, und es ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N}$ konvergent mit $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$.

Beweis. (i). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann für $n \geq N$, daß

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii). Es ist

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b).$$

Nach Satz 2.1.2 ist (b_n) beschränkt, d. h., es existiert $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann für $n \geq N$, daß

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |(a_n - a)b_n| + |a(b_n - b)| \\ &= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + |a| \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii). Dies folgt aus (ii) mit $b_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv). Sei $b \neq 0$. Dann gilt $\frac{|b|}{2} > 0$ und damit existiert $N \in \mathbb{N}$, so daß $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$. Es folgt $\frac{|b|}{2} > |b| - |b_n|$ und damit $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$. Insbesondere gilt also $b_n \neq 0$ für $n \geq N$.

Wir zeigen jetzt, daß $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq N}$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert. Dazu notieren wir zunächst, daß für $n \geq N$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Mit $N'' := \max\{N, N'\}$ folgt dann für $N \geq N''$, daß

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Damit gilt $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$. Aus (ii) folgt jetzt $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$. \square

Satz 2.2.2 Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) konvergiert genau dann, wenn die reellen Zahlenfolgen $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ konvergieren.

Beweis. “ \Leftarrow ”. Dies folgt aus Satz 2.2.1, (i) und (iii).

“ \Rightarrow ”. Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Die Behauptung folgt dann aus $|\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} a| = |\operatorname{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$ und $|\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} a| = |\operatorname{Im}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$. \square

Satz 2.2.3 Wenn die komplexe Zahlenfolge (a_n) gegen a konvergiert, so konvergieren $(|a_n|)$ gegen $|a|$ und $(\overline{a_n})$ gegen \overline{a} .

Beweis. Die Behauptung folgt aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ und $|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$. \square

Wir betrachten noch einmal das Beispiel der durch $a_n = q^n$ definierten komplexen Zahlenfolge (a_n) , wobei $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$. Gilt dann $a_n \rightarrow a$, so folgt $|a_n| \rightarrow |a|$. Wegen $|a_n| = |q^n| = |q|^n = 1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert dies $|a| = 1$. Weiter gilt auch $a_{n+1} \rightarrow a$. Andererseits gilt aber auch $a_{n+1} = qa_n \rightarrow qa$. Es folgt $a = qa$. Wegen $|a| = 1$ ist aber $a \neq 0$. Damit folgt $q = 1$. Für $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$, konvergiert also die komplexe Zahlenfolge (q^n) genau dann, wenn $q = 1$.

Satz 2.2.4 *Seien (a_n) , (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.*

Beweis. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Wir nehmen an, daß $a > b$ gilt. Dann ist $a - b > 0$ und damit auch $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Also existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N_b$. Sei $N := \max\{N_a, N_b\}$. Für $n \geq N$ gilt dann insbesondere $b_n - b < \varepsilon$ und $a - a_n < \varepsilon$. Es folgt $(b_n - b) + (a - a_n) < 2\varepsilon$ und damit $b_n - a_n < 2\varepsilon + b - a = 0$ für $n \geq N$. Es folgt $b_n < a_n$ für $n \geq N$. Dies ist ein Widerspruch. \square

Man beachte, daß aus $a_n < b_n$ für $n \geq N$ nicht $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ gefolgert werden kann. Ein Gegenbeispiel ist etwa durch $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n}$ gegeben. Hier sind beide Grenzwerte 0.

Eine wichtiger Spezialfall von Satz 2.2.4 ist der Fall, daß eine der Folgen (a_n) , (b_n) konstant ist. So folgt etwa aus $a_n \rightarrow a$ und $a_n \leq b$ für $n \geq N$, daß $a \leq b$ gilt.

Satz 2.2.5 *Seien (a_n) , (b_n) , (c_n) reelle Zahlenfolgen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \geq N$. Sind dann (a_n) und (c_n) konvergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, so ist auch (b_n) konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a_n) und (c_n) .*

Beweis. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_c \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_c$. Mit $N_b := \max\{N, N_a, N_c\}$ folgt dann für $n \geq N_b$, daß $a - b_n \leq a - a_n \leq |a_n - a| < \varepsilon$ und $b_n - a \leq c_n - a \leq |c_n - a| < \varepsilon$, also $|b_n - a| < \varepsilon$. \square

Beispiel. Sei $b \in \mathbb{R}_+$. Für $n \geq \max\{b, \frac{1}{b}\}$ ist dann $\frac{1}{n} \leq b \leq n$ und damit $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq \sqrt[n]{b} \leq \sqrt[n]{n}$. Wegen $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ folgt $\sqrt[n]{b} \rightarrow 1$.

2.3 Konvergenzkriterien

Satz 2.3.1 *Sei (a_n) eine monoton steigende (bzw. fallende) und nach oben (bzw. unten) beschränkte reelle Zahlenfolge. Dann ist (a_n) konvergent.*

Ist $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf A$).

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, daß (a_n) monoton steigend und nach oben beschränkt ist. (Der andere Fall kann darauf zurückgeführt werden.) Sei $a := \sup A$. Zu zeigen ist, daß $a_n \rightarrow a$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.7.4 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \varepsilon$. Wegen der Monotonie von (a_n) folgt $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Andererseits gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $a = \sup A$. Es folgt $|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. \square

Beispiel 1. Wir betrachten die *rekursiv* definierte Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Formaler Beweis durch vollständige Induktion.) Genauer gilt sogar, daß $a_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist klar für $n = 1$ und folgt für $n \geq 2$ wegen

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2 &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \right)^2 - 2 \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2} \right) - 2 \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1}^2 - 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1} - \frac{2}{a_{n-1}} \right)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

und $a_n > 0$. Desweiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, daß $a_{n+1} \leq a_n$, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{a_n^2} \right) \stackrel{a_n \geq \sqrt{2}}{\leq} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{2} \right) = 1.$$

Hieraus folgt unmittelbar (durch vollständige Induktion), daß $a_m \leq a_n$ für $m \geq n$ gilt, d. h., die Folge (a_n) ist monoton fallend. Nach Satz 2.3.1 konvergiert (a_n) also gegen $a = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Um den Grenzwert a zu bestimmen, notieren wir zunächst, daß wegen $a_n \geq \sqrt{2}$ nach Satz 2.2.4 auch $a \geq \sqrt{2}$ gilt. Außerdem gilt auch $a_{n+1} \rightarrow a$, und aus der Rekursionsformel und Satz 2.2.1 folgt damit $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$. Dies ergibt aber $\frac{a}{2} = \frac{1}{a}$ und damit $a^2 = 2$, wegen $a \geq \sqrt{2}$ also $a = \sqrt{2}$.

Allgemeiner kann man wie oben zeigen, daß für $c > 0, a_1 > 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{c}{a_n} \right)$$

folgt, daß $a_n \rightarrow \sqrt{c}$.

Beispiel 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. Dann ist (a_n) monoton steigend, denn für $n \geq 2$ ist

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, daß (b_n) monoton fallend ist. Damit gilt $a_1 \leq a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n \leq b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.3.1 existieren damit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Wegen $a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$ folgt $a = b$ nach Satz 2.2.1, (ii).

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n) heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet. Es gilt $e = 2,718\dots$

Definition 2.3.1 Sei (a_n) Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a *Häufungswert* von (a_n) , falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existieren.

Äquivalent dazu, daß a Häufungswert von (a_n) ist, sind:

- $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \wedge |a_n - a| < \varepsilon$,
- Für jede Umgebung U von a existieren unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U$.

Als Beispiel betrachten wir die durch $a_n = (-1)^n$ gegebene Folge (a_n) . Hier sind 1 und -1 Häufungswerte.

Definition 2.3.2 Sei X Menge, $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ Folge und $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ streng monoton steigende Folge. Dann heißt die Folge $a \circ \nu : \mathbb{N} \rightarrow X$ eine *Teilfolge* von a . Sie wird mit $(a_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ oder $(a_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ bezeichnet.

Satz 2.3.2 Sei (a_n) Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

- (i) a ist Häufungswert von $(a_n) \Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge von (a_n) , die gegen a konvergiert.
- (ii) a ist Grenzwert von $(a_n) \Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen von (a_n) konvergieren gegen a .

Der *Beweis* sei als Übung überlassen.

6.12.99

Satz 2.3.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Sei (a_n) beschränkte Zahlenfolge. Wir betrachten zunächst den Fall, daß (a_n) reelle Zahlenfolge ist. Wir zeigen, daß (a_n) eine monotone Teilfolge besitzt. (“Monoton” bedeutet hier natürlich “monoton steigend oder monoton fallend”.) Diese Teilfolge ist natürlich auch beschränkt, und damit konvergent nach Satz 2.3.1.

Um die Existenz einer monotonen Teilfolge zu zeigen, nennen wir $m \in \mathbb{N}$ *Gipfel* von (a_n) , falls $a_n < a_m$ für alle $n > m$.

Fall 1. Es existieren unendlich viele Gipfel. Seien m_1, m_2, m_3, \dots Gipfel mit $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$. Dann ist (a_{m_k}) monoton fallende Teilfolge von (a_n) .

Fall 2. Es existieren höchstens endlich viele Gipfel. Dann existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ keine Gipfel sind. Insbesondere ist n_1 kein Gipfel und damit

existiert $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Auch n_2 ist kein Gipfel, also existiert $n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} \geq a_{n_2}$, und n_3 ist kein Gipfel. Induktiv erhält man so eine monoton steigende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) .

Wir betrachten jetzt den Fall, daß (a_n) (beschränkte) komplexe Zahlenfolge ist. Dann sind die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ reell und beschränkt. Nach dem bereits bewiesenen besitzt $(\operatorname{Re} a_n)$ eine konvergente Teilfolge $(\operatorname{Re} a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, und die Folge $(\operatorname{Im} a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $(\operatorname{Im} a_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$. Es folgt, daß $(a_{n_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. \square

Definition 2.3.3 Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

In Quantorenschreibweise lautet die Definition wie folgt:

$$\begin{aligned} & (a_n) \text{ ist Cauchyfolge} \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : (m \geq N \wedge n \geq N) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 2.3.4 (Cauchy Kriterium für Folgen) *Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie Cauchyfolge ist.*

Beweis. “ \Rightarrow ” Sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ and $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Gilt dann $m \geq N$ und $n \geq N$, so folgt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

“ \Leftarrow ”: Sei (a_n) Cauchyfolge. Zu zeigen ist, daß (a_n) konvergiert. Wir zeigen zunächst (ähnlich wie im Beweis von Satz 2.1.2), daß (a_n) beschränkt ist. Dazu notieren wir, daß ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < 1$ für $m, n \geq N$. Es folgt $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ für $n \geq N$, und damit $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert also eine konvergente Teilfolge von (a_n) , etwa $a_{n_k} \rightarrow a$.

Wir zeigen jetzt, daß $a_n \rightarrow a$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$. Außerdem existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Sei nun $n \geq N$. Dann existiert $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq K$ und $n_\ell \geq N$. Es folgt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_\ell}| + |a_{n_\ell} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Wichtig bei obigem Satz sowie den Sätzen 2.3.1 und 2.3.2 ist, daß sie erlauben, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, *ohne den Grenzwert zu kennen*. Das Entscheidende dabei ist die Vollständigkeit von \mathbb{R} .

Umgekehrt könnte man auch wieder die Vollständigkeit dadurch definieren, daß man die Konvergenz jeder Cauchyfolge verlangt. Dann müßte man aber, um dem Vollständigkeitsbegriff von Definition 1.7.3 zu erhalten, noch zusätzlich das Archimedische Axiom verlangen; vgl. die Diskussion nach Satz 1.8.9. (Wir werden aber später in metrischen Räumen Vollständigkeit auf diesem Wege definieren.)

Exkurs: Konstruktion der reellen Zahlen. Wir wollen den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen zum Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen “vervollständigen”.

Dazu sei C die Menge der Cauchyfolgen rationaler Zahlen. Wir betrachten die auf C durch

$$(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$$

definierte Relation \sim .

Man zeigt leicht, daß \sim Äquivalenzrelation ist. Um etwa die Transitivität zu zeigen, seien $(x_n), (y_n), (z_n) \in C$ mit $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n)$. Dann gilt $(x_n - y_n) \rightarrow 0$ und $(y_n - z_n) \rightarrow 0$ und damit $(x_n - z_n) = (x_n - y_n) + (y_n - z_n) \rightarrow 0$, also $(x_n) \sim (z_n)$.

Auf der Menge C/\sim der Äquivalenzklassen definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)]$$

und

$$[(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n \cdot y_n)].$$

Zunächst muß man zeigen, daß diese Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen wohldefiniert sind. Dazu muß man zum einen zeigen, daß mit $(x_n), (y_n) \in C$ auch $(x_n + y_n) \in C$ und $(x_n \cdot y_n) \in C$ gilt, und zum andern, daß für $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n)$ auch $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ und $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$ gilt. Wir verzichten hier auf den Beweis dieser Aussagen.

Es gilt dann, daß $(C/\sim, +, \cdot)$ Körper ist. Auf einen Nachweis der einzelnen Körperaxiome verzichten wir. Das Nullelement des Körpers ist $[(0, 0, 0, \dots)]$ und das Einselement ist $[(1, 1, 1, \dots)]$.

Wir definieren eine Ordnung \leq auf C/\sim wie folgt:

$$[(x_n)] \leq [(y_n)] :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n + \varepsilon.$$

(Man beachte hier, daß die "naive" Setzung $[(x_n)] \leq [(y_n)] :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$ hier *nicht* zum Erfolg führt. Diese ist noch nicht einmal wohldefiniert. Beispielsweise ist ja $[(\frac{1}{n})] = [(-\frac{1}{n})]$.)

Zunächst muß man wieder zeigen, daß \leq wohldefiniert ist. Sei dazu $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n)$ und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n + \varepsilon.$$

Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x'_n \leq y'_n + \varepsilon.$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert M mit $x_n \leq y_n + \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq M$. Weiter existieren $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_x$ und $|y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_y$. Für $n \geq \max\{M, N_x, N_y\}$ folgt dann

$$x'_n < x_n + \frac{\varepsilon}{3} < y_n + 2\frac{\varepsilon}{3} < y'_n + 3\frac{\varepsilon}{3} = y'_n + \varepsilon.$$

Es ist leicht zu sehen, daß \leq tatsächlich Ordnung ist. Ebenso kann man nachrechnen, daß die Ordnungsaxiome (O1) und (O2) erfüllt sind. Damit erhält man, daß $(C/\sim, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper ist.

Man kann $r \in \mathbb{Q}$ mit der Äquivalenzklasse $[(r, r, r, \dots)]$ identifizieren. In diesem Sinne ist \mathbb{Q} Teilkörper von C/\sim . Formal betrachtet man wieder die injektive Abbildung $i : \mathbb{Q} \rightarrow C/\sim, r \mapsto [(r, r, r, \dots)]$. Es gilt für $r, s \in \mathbb{Q}$ dann, daß $i(r + s) = i(r) + i(s)$, $i(r \cdot s) = i(r) \cdot i(s)$ und $r \leq s \Leftrightarrow i(r) \leq i(s)$.

Schließlich zeigt man dann, daß $(C/\sim, +, \cdot)$ vollständig ist. Dies kann man beispielsweise tun, indem man Folgendes zeigt:

- Jede Cauchyfolge in $(C/\sim, +, \cdot)$ ist konvergent.
- In $(C/\sim, +, \cdot)$ gilt das Archimedische Axiom.
- Ein angeordneter Körper, in dem das Archimedische Axiom gilt und in dem jede Cauchyfolge konvergiert, ist vollständig.

Wir verzichten hier auf die Einzelheiten.

9.12.99

2.4 Limes superior und inferior sowie uneigentliche Grenzwerte

Sei (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{a_k : k \geq n\}$. Dann ist A_n beschränkt und damit existiert $\sup A_n$. Ist $m \leq n$, so gilt $A_n \subset A_m$ und damit $\sup A_n \leq \sup A_m$. Die Folge $(\sup A_n)$ ist also monoton fallend. Außerdem ist sie beschränkt. Deshalb ist sie nach Satz 2.3.1 konvergent und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup A_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k$.

Definition 2.4.1 Sei (a_k) reelle Zahlenfolge. Dann heißen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k$$

Limes superior und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$$

Limes inferior von (a_n) , falls die Suprema und Infima rechts existieren.

Statt \limsup schreibt man auch $\overline{\lim}$ und statt \liminf schreibt man auch $\underline{\lim}$. Aus den obigen Überlegungen folgt, daß Limes superior und inferior immer existieren, wenn (a_n) beschränkt ist. Umgekehrt sieht man sofort, daß aus der Existenz des Limes superior die Beschränktheit von (a_n) nach oben und aus der des Limes inferior die Beschränktheit nach unten folgt.

Wegen $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup A_n$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf A_n$ und $\inf A_n \leq \sup A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 2.2.4, daß

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$$

gilt.

Satz 2.4.1 Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn der Limes superior und inferior beide existieren und den gleichen Wert haben.

Beweis. “ \Rightarrow ”. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Es folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für $n \geq N$ und damit $a - \varepsilon < \inf_{k \geq N} a_k \leq \sup_{k \geq N} a_k < a + \varepsilon$. Damit gilt $a - \varepsilon < \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k < a + \varepsilon$.

“ \Leftarrow ”. Sei $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < \inf_{k \geq n} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k < a + \varepsilon$ für $n \geq N$. Es folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ und damit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. \square

Satz 2.4.2 Sei (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge und sei H die Menge der Häufungswerte von (a_n) . Dann ist $H \neq \emptyset$ und es gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup H$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf H$.

Der *Beweis* sei als Übung überlassen. Es sei aber angemerkt, daß die Aussage $H \neq \emptyset$ unmittelbar aus Satz 2.3.2, (i), und dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt.

Wir erweitern nun \mathbb{R} durch hinzufügen zweier Elemente ∞ (gelegentlich auch mit $+\infty$ bezeichnet) und $-\infty$ zu einer Menge $\overline{\mathbb{R}}$, also $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Die Ordnung \leq auf \mathbb{R} erweitern wir zu einer Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$, indem wir $-\infty < x$ und $x < \infty$ für $x \in \mathbb{R}$ und außerdem $-\infty < \infty$ setzen. Man rechnet leicht nach, daß $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ geordnete Menge ist. Es ist dabei jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ beschränkt, denn ∞ ist immer obere und $-\infty$ ist immer untere Schranke. Außerdem ist die geordnete Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ ordnungsvollständig. Um dies einzusehen, bezeichnen wir (vorübergehend) das Supremum in (\mathbb{R}, \leq) mit $\sup_{\mathbb{R}}$ und das in $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ mit $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}$. Sei nun $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Es zeigt sich dann, daß $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = \infty$ falls $\infty \in A$ oder falls $A \cap \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, und daß $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = \sup_{\mathbb{R}}(A \cap \mathbb{R})$ falls $\infty \notin A$ und $A \cap \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt ist. Im verbleibenden Fall ist $\infty \notin A$ und $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$, also $A = \{-\infty\}$ oder $A = \emptyset$, und es folgt $\sup A = -\infty$. Analog läßt sich auch das Infimum von Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ kennzeichnen. Wir halten also fest, daß jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum (bzgl. der geordneten Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$) besitzt.

Nach Definition 2.4.1 und Satz 2.4.1 sind Limes superior, Limes inferior und Grenzwert einer reellen Zahlenfolge Suprema und Infima gewisser Teilmengen von \mathbb{R} . Wir nehmen nun diese Suprema und Infima bzgl. der geordneten Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$. Es folgt, daß Limes superior und Limes inferior dann für jede reelle Zahlenfolge (und sogar für jede Folge nach $\overline{\mathbb{R}}$) existieren, möglicherweise aber den Wert ∞ oder $-\infty$ haben. Gilt für eine reelle Zahlenfolge (a_n) , daß $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (und damit auch $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$), so schreiben wir auch $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und nennen (a_n) *bestimmt divergent* gegen ∞ . Analog definiert man bestimmte Divergenz gegen $-\infty$. Man bezeichnet ∞ und $-\infty$ auch als *uneigentliche Grenzwerte*.

Beispiele. 1. Sei $a_n = n$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, denn mit $A_n := \{a_k : k \geq n\}$ ist $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} A_n = \inf_{\mathbb{R}} A_n = n$ und folglich $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \{\inf_{\overline{\mathbb{R}}} A_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{N} = \infty$.

2. Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist $A_n := \{-1, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, daß $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

2.5 Die allgemeine Potenz

In Definition 1.8.1 hatten wir die Potenz a^r für $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}$ erklärt. Wir wollen dies jetzt für $r \in \mathbb{R}$ tun. Eine Möglichkeit dafür wurde bereits im Anschluß

an Satz 1.8.6 angegeben, aber wir beschreiten jetzt einen anderen Weg.

Hilfssatz 2.5.1 Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \rightarrow 0$ und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $a^{r_n} \rightarrow 1$.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $a > 1$ annehmen. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wegen $a^{1/k} \rightarrow 1$ für $k \rightarrow \infty$ (vgl. Beispiel nach Satz 2.2.5) existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|a^{1/k} - 1| < \varepsilon$ und $|a^{-1/k} - 1| = |(\frac{1}{a})^{1/k} - 1| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|r_n| < \frac{1}{K}$ für $n \geq N$. Es folgt $-\varepsilon < a^{-1/K} - 1 < a^{r_n} - 1 < a^{1/K} - 1 < \varepsilon$, also $|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$, für $n \geq N$. \square

Hilfssatz 2.5.2 Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Konvergiert (r_n) , so konvergiert auch (a^{r_n}) . Dabei hängt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$ nur von $r := \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ ab und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = a^r$ falls $r \in \mathbb{Q}$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man wieder $a > 1$ annehmen. Sei (s_n) eine monoton fallende Folge mit $s_n \rightarrow r$. (Die Existenz einer solchen Folge kann man aus Satz 1.8.4 ableiten, welcher besagt, daß \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} ist.) Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq r$. Dann gilt $s_n \geq r \geq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a^{s_n} \geq a^m$ nach Satz 1.8.6. Folglich ist (a^{s_n}) nach unten beschränkt. Außerdem ist (a^{s_n}) nach Satz 1.8.6 monoton fallend, und damit nach Satz 2.3.1 konvergent.

Sei nun (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \rightarrow r$. Dann gilt $r_n - s_n \rightarrow 0$, nach Hilfssatz 2.5.1 also $a^{r_n - s_n} \rightarrow 1$. Wegen $a^{r_n} = a^{s_n + r_n - s_n} = a^{s_n} a^{r_n - s_n}$ ist dann auch (a^{r_n}) konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a^{s_n}) .

Ist $r \in \mathbb{Q}$, so kann man $s_n = r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen, und damit ist a^r der gemeinsame Grenzwert von (a^{r_n}) und (a^{s_n}) . \square

Definition 2.5.1 Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir $a^r := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n}$, wobei (r_n) eine rationale Zahlenfolge mit $r_n \rightarrow r$ ist.

Hilfssatz 2.5.2 zeigt, daß a^r wohldefiniert ist (und im Beweis wurde bemerkt, daß eine Folge (r_n) mit den gewünschten Eigenschaften für jedes $r \in \mathbb{R}$ existiert).

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß die in Satz 1.8.6 formulierten Potenzgesetze auch für reelle Exponenten richtig bleiben. Ebenso bleiben auch die Behauptungen der obigen Hilfssätze richtig, wenn man $r_n, r \in \mathbb{R}$ zuläßt.

13.12.99

2.6 Reihen

Definition 2.6.1 Sei $N \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \geq N}$ Zahlenfolge. Die durch $s_n := \sum_{k=N}^n a_k$ definierte Folge $(s_n)_{n \geq N}$ heißt die zu (a_n) gehörige (unendliche) Reihe. Sie wird mit $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ oder auch $\sum a_n$ bezeichnet. Die Reihe heißt konvergent, wenn die Folge (s_n) konvergiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert von (s_n) die Summe der Reihe $\sum a_n$. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, so schreibt man $\sum_{n=N}^{\infty} a_n = s$.

Reihen, die nicht konvergieren, heißen divergent (und bei Existenz des uneigentlichen Grenzwertes ∞ oder $-\infty$ auch bestimmt divergent). Die Folge (s_n) heißt auch Folge der Partialsummen (oder Teilsommen) der Reihe $\sum a_n$.

Wir bezeichnen mit $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ bzw. $\sum a_n$ also sowohl die Reihe selbst, wie auch – im Konvergenzfall – ihre Summe. Das sollte im allgemeinen aber nicht zu Verwechslungen führen.

Beispiel. Sei $q \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Es ist also $a_n = q^n$. Diese Reihe heißt *geometrische Reihe*.

Fall 1. $q = 1$. Dann gilt $a_n = 1$ und $s_n = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$. Die Reihe ist (bestimmt) divergent.

Fall 2. $q \neq 1$. Es gilt $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, denn

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n (1-q)q^k \\ &= \sum_{k=0}^n q^k - q^{k+1} \\ &= 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \dots + q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Wegen $q^{n+1} \rightarrow 0$ für $|q| < 1$ folgt, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1,$$

d. h., die Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und ihre Summe ist $\frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Da Reihen nach Definition also nichts anderes als Folgen sind, haben Sätze über Folgen Analoga für Reihen. Aus Satz 2.2.1, (i), erhält man z. B., daß aus der Konvergenz von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ die von $\sum (a_n + b_n)$ folgt, und daß für die Summen $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ gilt. Analog überträgt sich Satz 2.2.1, (iii).

Satz 2.6.1 *Sei $\sum a_n$ eine Reihe nichtnegativer reeller Zahlen, d. h., es gelte $a_n \geq 0$ für alle n . Dann konvergiert $\sum a_n$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. “ \Rightarrow ” folgt aus Satz 2.1.2 (“Konvergente Folgen sind beschränkt”), und “ \Leftarrow ” folgt aus Satz 2.3.1, da die Folge der Partialsummen wegen $a_n \geq 0$ monoton steigend ist. \square

Satz 2.6.2 (Cauchyscher Verdichtungssatz) *Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.*

Beweis. Mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ist

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{2^{n+1}-1} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + \dots + a_{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + a_4 + a_5 + a_5 + \dots + a_{2^n} \\ &= 2s_{2^n} - a_1 \\ &\leq 2s_{2^n}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit Satz 2.6.1. \square

Beispiel. Sei $\alpha > 0$ und $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 2.6.2 erfüllt und damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergent, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$$

konvergiert. Dies ist aber die geometrische Reihe, und diese konvergiert genau dann, wenn $2^{1-\alpha} < 1$, also wenn $\alpha > 1$ gilt.

Insgesamt konvergiert also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$, und divergiert für $0 < \alpha \leq 1$. Insbesondere divergiert die sogenannte *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Satz 2.6.3 (Leibnizkriterium) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$. Für die Folge (s_n) der Partialsummen gilt dabei $s_{2n} \leq \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k \leq s_{2n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+1} a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$ für $n \in \mathbb{N}$, also ist (s_{2n-1}) monoton fallend. Analog ist (s_{2n}) monoton steigend. Außerdem gilt $s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1} a_{2n} = -a_{2n} < 0$ und damit $s_2 \leq s_{2n} < s_{2n-1} \leq s_1$.

Nach Satz 2.3.1 konvergieren damit die Folgen (s_{2n-1}) und (s_{2n}) , und wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \rightarrow 0$ haben sie den gleichen Grenzwert. Daraus folgt die Behauptung. \square

Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ ist konvergent. Für die Summe s gilt $s_2 = \frac{1}{2} \leq s \leq 1 = s_1$. (Tatsächlich gilt $e^s = 2$, und es ist $s = 0,6931471806\dots$) 16.12.99

Satz 2.6.4 (Cauchy Kriterium für Reihen) Eine Reihe $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \geq K \forall m, n \in \mathbb{N} : n > m \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Wegen $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^n a_k$ folgt die Behauptung aus Satz 2.3.4. \square

Satz 2.6.5 Konvergiert $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Beweis. Man wähle $n = m + 1$ im Cauchy Kriterium. \square

Die harmonische Reihe zeigt, daß in Satz 2.6.5 nicht die Umkehrung gilt.

2.7 Absolute und bedingte Konvergenz

Definition 2.7.1 Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

Satz 2.7.1 *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

Der *Beweis* folgt wegen $|\sum_{k=m+1}^n a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k|$ unmittelbar aus dem Cauchy Kriterium. \square

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. So ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Wir betrachten dieses Beispiel genauer:

$$\begin{array}{rcccccccc}
s & = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\dots \\
\frac{s}{2} & = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & +\dots \\
\hline
\frac{3s}{2} & = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\dots
\end{array}$$

Es zeigt sich, daß in der Reihe für $\frac{3s}{2}$ dieselben Folgenglieder auftreten wie in der Reihe für s , aber in anderer Reihenfolge.

Definition 2.7.2 Sei $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede ihrer Umordnungen konvergiert, und zwar zur selben Summe. Eine konvergente, aber nicht unbedingt konvergente Reihe heißt *bedingt konvergent*.

Satz 2.7.2 *Absolut konvergente Reihen sind unbedingt konvergent.*

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung.

Beweis von Satz 2.7.2. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergente Reihe und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ eine Umordnung der Reihe. Sei $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ und sei $t_n = \sum_{k=1}^n a_{\nu(k)}$. Dann ist (s_n) konvergent, und wir müssen zeigen, daß (t_n) ebenfalls konvergent ist und denselben Grenzwert hat. Dazu reicht es zu zeigen, daß $t_n - s_n \rightarrow 0$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wegen der absoluten Konvergenz und aufgrund des Cauchyriteriums existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m+1}^n |a_k| < \varepsilon$ für $n > m \geq N$. Weiter existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$ und $\nu(\{1, 2, \dots, M\}) \supset \{1, 2, \dots, N\}$. Für $n \geq M$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|t_n - s_n| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{\nu(k)} - \sum_{k=1}^n a_k \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \nu(\{1, 2, \dots, n\})} a_k - \sum_{k=1}^n a_k \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \nu(\{1, 2, \dots, n\}) \setminus \{1, 2, \dots, N\}} a_k - \sum_{k=N+1}^n a_k \right| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\max \nu(\{1, 2, \dots, n\})} |a_k| \\
&< \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 2.7.3 *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen mit Summen a und b . Dann ist die aus allen Produkten $a_j b_k$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, gebildete Reihe absolut konvergent und ihre Summe ist ab .*

Eine etwas formale Fassung der Behauptung des Satzes ist folgende: ist $\phi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Bijektion und ist $p_n := a_j b_k$ falls $\phi(n) = (j, k)$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ab$.

Beweis von Satz 2.7.3. Seien ϕ und p_n wie oben, mit $\phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1, 2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $M_{i,n} := \max \phi_i(\{1, 2, \dots, n\})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^n |p_\ell| &= \sum_{\ell=0}^n |a_{\phi_1(\ell)}| |b_{\phi_2(\ell)}| \\ &\leq \sum_{j=0}^{M_{1,n}} \sum_{k=0}^{M_{2,n}} |a_j| |b_k| \\ &= \left(\sum_{j=0}^{M_{1,n}} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{M_{2,n}} |b_k| \right) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right). \end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|$ nach Satz 2.7.1.

Es reicht nun, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ab$ für eine Summationsreihenfolge (d. h., für eine Funktion ϕ) zu zeigen. Dazu betrachten wir die im folgenden Diagramm angedeutete Summationsreihenfolge:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 b_0 & \rightarrow & a_0 b_1 & & a_0 b_2 & \rightarrow & a_0 b_3 & & a_0 b_4 \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ a_1 b_0 & \leftarrow & a_1 b_1 & & a_1 b_2 & & a_1 b_3 & & a_1 b_4 \\ & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ a_2 b_0 & \rightarrow & a_2 b_1 & \rightarrow & a_2 b_2 & & a_2 b_3 & & a_2 b_4 \\ & & & & & & \downarrow & & \uparrow \\ a_3 b_0 & \leftarrow & a_3 b_1 & \leftarrow & a_3 b_2 & \leftarrow & a_3 b_3 & & a_3 b_4 \\ & & \downarrow & & & & & & \uparrow \\ a_4 b_0 & \rightarrow & a_4 b_1 & \rightarrow & a_4 b_2 & \rightarrow & a_4 b_3 & \rightarrow & a_4 b_4 \end{array}$$

Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} p_k = \left(\sum_{j=0}^n a_j \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \rightarrow ab$$

und damit $\sum_{k=0}^n p_k \rightarrow ab$. \square

Eine andere wichtige Summationsreihenfolge wird durch die folgende Definition gegeben.

Definition 2.7.3 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Nach Satz 2.7.3 ist das Cauchyprodukt zweier absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Darüberhinaus kann man zeigen, daß das Cauchyprodukt auch dann konvergiert, und zwar zur "richtigen" Summe, wenn nur eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergiert und die andere nur im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

2.8 Kriterien für absolute Konvergenz

Satz 2.8.1 (Vergleichskriterium) Seien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ Reihen.

- (i) Existiert $M \geq N$ mit $|a_n| \leq b_n$ für $n \geq M$ und ist $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- (ii) Existiert $M \geq N$ mit $0 \leq b_n \leq a_n$ für $n \geq M$ und ist $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ divergent, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.

In (i) kann a_n komplex sein, in (ii) muß a_n reell sein. Sowohl in (i) wie in (ii) ist b_n reell. Man nennt (i) *Majorantenkriterium* und (ii) *Minorantenkriterium*.

Beweis. (i). Mit $s_n = \sum_{k=M}^n |a_k|$ und $t_n = \sum_{k=M}^n b_k$ ist $s_n \leq t_n$ für $n \geq M$. Konvergiert $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$, so ist auch $(t_n)_{k \geq M}$ konvergent und folglich beschränkt. Damit ist $(s_n)_{k \geq M}$ beschränkt, also konvergent, und damit auch $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Der Beweis von (ii) ist analog. \square

20.12.99

Beispiel. Sei

$$a_n := \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \left(\frac{3 + 4i}{5} \right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \left(\frac{|3 + 4i|}{5} \right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \left(\frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{5} \right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Satz 2.8.2 (Wurzelkriterium) Sei $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ Reihe.

- (i) Existiert $q \in [0, 1)$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für $n \geq M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- (ii) Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.

Bemerkung. Die Voraussetzung in (i) ist äquivalent zu $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, und die Voraussetzung in (ii) ist erfüllt, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Beweis von Satz 2.8.2. (i). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt $|a_n| \leq q^n$, und damit folgt die Behauptung aus dem Vergleichskriterium, da die geometrische Reihe $\sum q^n$ für $0 \leq q < 1$ konvergiert.

(ii). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ folgt $|a_n| \geq 1$. Gilt dies für unendlich viele n , so ist (a_n) keine Nullfolge, und damit die Reihe $\sum a_n$ divergent nach Satz 2.6.5. \square

Beispiel. Sei

$$a_n := \left(\frac{in}{n+1} \right)^{n(n+1)}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left| \frac{in}{n+1} \right|^{n(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{e}.$$

Wegen $\frac{1}{e} < 1$ folgt, daß $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist.

Satz 2.8.3 (Quotientenkriterium) Sei $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ Reihe.

- (i) Existiert $q \in [0, 1)$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für $n \geq M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
- (ii) Existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für $n \geq M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.

Bemerkung. Es gelte $a_n \neq 0$ für $n \geq M$. Die Voraussetzung in (i) ist dann äquivalent zu $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, und die Voraussetzung in (ii) ist erfüllt, falls $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$.

Beweis von Satz 2.8.3. (i). Es ist $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \dots \leq q^{n-M}|a_M| = q^n q^{-M}|a_M|$ für $n \geq M$. Die Behauptung folgt aus dem Vergleichskriterium.

(ii) Analog zu (i) folgt $|a_n| \geq |a_M|$ für $n \geq M$. Damit ist (a_n) keine Nullfolge, also $\sum a_n$ divergent.

Beispiel. Sei

$$a_n := \frac{7^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{7^n (2n)! n!}{(3n)!}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \frac{7^{n+1} (2n+2)! (n+1)!}{(3n+3)!} \frac{(3n)!}{7^n (2n)! n!} \\ &= \frac{7 \cdot 7^n (2n+2)(2n+1)(2n)! (n+1)n!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!} \frac{(3n)!}{7^n (2n)! n!} \\ &= \frac{7(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{7(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\ &= \frac{7 \left(2 + \frac{2}{n}\right) \left(2n + \frac{1}{n}\right) \left(n + \frac{1}{n}\right)}{\left(3n + \frac{3}{n}\right) \left(3n + \frac{2}{n}\right) \left(3n + \frac{1}{n}\right)} \\ &\rightarrow \frac{7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \frac{28}{27}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{28}{27} > 1$ divergiert die Reihe $\sum a_n$.

2.9 Potenzreihen

Definition 2.9.1 Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, mit $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und einer Folge (a_n) komplexer Zahlen, heißt *Potenzreihe*.

Ist z_0 und (a_n) gegeben, so stellt sich die Frage, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe konvergiert. Dies wird weitgehend durch den folgenden Satz geklärt.

Satz 2.9.1 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Potenzreihe. Es sei $\ell := \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ und $r := \frac{1}{\ell}$ falls $\ell \in \mathbb{R}_+$, $r := 0$ falls $\ell = \infty$ und $r := \infty$ falls $\ell = 0$. Dann konvergiert die Potenzreihe absolut falls $|z - z_0| < r$ und sie divergiert falls $|z - z_0| > r$

Beweis. Sei $b_n := a_n(z - z_0)^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z - z_0|$. Hieraus ergibt sich $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell|z - z_0|$. Die Behauptung folgt jetzt aus dem Wurzelkriterium. \square

Bemerkungen. 1. Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe innerhalb eines Kreises vom Radius r um z_0 , und sie divergiert außerhalb dieses Kreises. Daher nennt man das in Satz 2.9.1 definierte r den *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

2. Satz 2.9.1 macht keine Aussage für den Fall, daß $|z - z_0| = r$. Hier ist in der Tat "alles möglich", wie die folgenden Beispiele belegen:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, also $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0 = 0$. Es gilt $\ell = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ und damit $r = 1$. Damit liegt (absolute) Konvergenz für $|z| < 1$ und Divergenz für $|z| > 1$ vor. Für $z = 1$ liegt Divergenz vor, für $z = -1$ Konvergenz.
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$. Wieder gilt $r = 1$, aber diesmal liegt Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ vor.
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$. Wieder gilt $r = 1$, aber jetzt liegt Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ vor.

23.12.99

Satz 2.9.2 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Existiert der (möglicherweise uneigentliche) Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, so gilt $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Der *Beweis* ist analog zum Beweis von Satz 2.9.1, wobei man statt des Wurzelkriteriums aber jetzt das Quotientenkriterium verwendet.

Beispiel. Sei $a_n := \frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = \infty$. Es folgt, daß die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Ein Nebenergebnis ist, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Definition 2.9.2 Die durch $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ definierte Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Exponentialfunktion*.

Gemäß obigem Beispiel konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$. Statt $\exp(z)$ schreibt man auch $\exp z$.

Satz 2.9.3 Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \exp(z) \cdot \exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \right) \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Prod.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \frac{1}{(n-k)!} w^{n-k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \\
&= \exp(z+w). \quad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 2.9.1 Sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

(i) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$, insbesondere also $\exp z \neq 0$.

(ii) $\exp(nz) = (\exp z)^n$.

Man erhält hier (i) wegen $\exp(-z) \exp z = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$, und auch (ii) folgt leicht.

Satz 2.9.4 Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Nun gilt für $n \geq 2$, daß

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| &= \left| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \right| \\
&= \left| \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) z^k \right| \\
&\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}\right) |z|^k \\
&\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k\right) |z|^k \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^k\right) |z|^k \\
&\stackrel{\text{Bernoulli}}{\leq} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \left(1 - k \frac{k-1}{n}\right)\right) |z|^k \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{k(k-1)}{n} |z|^k \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} |z|^k \\
&= \frac{1}{n} |z|^2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{1}{j!} |z|^j \\
&\leq \frac{1}{n} |z|^2 \exp |z|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Folgerung 2.9.2 $\exp 1 = e$.

Dabei ist $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\dots$ die in §2.3 definierte Eulersche Zahl.

Satz 2.9.5 Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp x = e^x$.

Aufgrund dieses Satzes setzt man $e^z := \exp z$ für $z \in \mathbb{C}$.

Beweis von Satz 2.9.5. Für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist $\left(\exp \frac{1}{q}\right)^q = \exp\left(q \frac{1}{q}\right) = \exp 1 = e$, also $\exp \frac{1}{q} = e^{1/q}$ und damit $\exp \frac{p}{q} = \left(\exp \frac{1}{q}\right)^p = (e^{1/q})^p = e^{p/q}$. Daraus folgt die Behauptung für alle $r \in \mathbb{Q}$. Ist nun $r \in \mathbb{R}$, so wähle man eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \rightarrow r$. Es gilt dann nach Definition von e^r , daß $e^{r_n} \rightarrow e^r$. Ähnlich kann man (und werden wir später) zeigen, daß auch $\exp r_n \rightarrow \exp r$ gilt. Hieraus folgt dann die Behauptung. Wir verzichten jetzt auf die Details.

Satz 2.9.6 e ist irrational.

Beweis. Wir nehmen an, daß e rational ist, etwa $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(q-1)!p = q!e = q! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!},$$

also

$$S := \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} = (q-1)!p - \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}.$$

Dies steht im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \\ &< \frac{1}{q+1} + \left(\frac{1}{q+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{q+1}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q+1}\right)^j \\ &= \frac{1}{q+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} \\ &= \frac{1}{q} \\ &\leq 1. \quad \square \end{aligned}$$

3 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1.1 Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ und sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion. Sei $\xi \in M$. Dann heißt f stetig (englisch: continuous) in ξ , falls für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \rightarrow \xi$ gilt, daß $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Für $A \subset M$ heißt f stetig in A , falls f stetig in jedem Punkt von A ist. Schließlich heißt f stetig, wenn f stetig in M ist.

Es genügt natürlich im folgenden, den Fall $N = \mathbb{C}$ zu betrachten.

Aus den Sätzen aus §2.2 erhält man unmittelbar die folgenden Regeln:

- Sind $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig (in $\xi \in M$), so sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und mit $c \in \mathbb{C}$ auch $c \cdot f$ stetig (in ξ). Falls $g(\xi) \neq 0$, so ist auch (die in $M \setminus g^{-1}(0)$ definierte) Funktion $\frac{f}{g}$ stetig in ξ .
- f ist stetig (in ξ) genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ stetig (in ξ) sind.
- Die durch $z \mapsto |z|$ und $z \mapsto \bar{z}$ definierten Funktionen sind stetig.

In §2.5 wurde gezeigt, daß für $a \in \mathbb{R}_+$ die durch $x \rightarrow a^x$ definierte Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R}_+ stetig ist.

Offensichtlich ist für $M \subset \mathbb{C}$ auch die Funktion id_M stetig.

3.1.2000

Satz 3.1.1 Seien $M, N, P, Q \subset \mathbb{C}$ mit $N \subset P$ und seien $g : M \rightarrow N$ stetig (in $\xi \in M$) und $f : P \rightarrow Q$ stetig (in $g(\xi) \in g(M) \subset N \subset P$). Dann ist $f \circ g$ stetig (in ξ).

Beweis. Sei (x_n) Folge in M mit $x_n \rightarrow \xi$. Da g stetig, folgt $g(x_n) \rightarrow g(\xi)$. Nun ist aber $(g(x_n))$ Folge in P und damit folgt aus der Stetigkeit von f in $g(\xi)$, daß $f(g(x_n)) \rightarrow f(g(\xi))$, also $(f \circ g)(x_n) \rightarrow (f \circ g)(\xi)$. \square

Beispiele. 1. Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto |z^2 + \bar{z}|$ ist stetig. Denn die Funktionen $f_1 := \operatorname{id}_{\mathbb{C}}$, $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_2(z) = \bar{z}$, und $f_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_3(z) = |z|$, sind alle stetig und damit auch $f_1 \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_1 + f_2$ und $f = f_3 \circ (f_1 \cdot f_1 + f_2)$.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3|x^4 - 7|}{(e^x - 9x)^2 + 11},$$

ist stetig, da sie durch Verknüpfungen wie $+$, \cdot , \circ , \dots aus stetigen Funktionen aufgebaut ist. (Man beachte, daß der Nenner keine Nullstellen hat.)

3. Sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f stetig. Denn ist $\xi \in \mathbb{Z}$ und (x_n) Folge in \mathbb{Z} mit $x_n \rightarrow \xi$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \frac{1}{2}$ für $n \geq N$. Es folgt $x_n = \xi$ und damit $f(x_n) = f(\xi)$ für $n \geq N$, also $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$.

Analog sieht man, daß Zahlenfolgen (also Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{C}) stetig sind.

4. Sei $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x \text{ rational, mit } x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Behauptung. Die Funktion f ist stetig in irrationalen und unstetig in rationalen Zahlen.

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{Q}$. Dann ist durch $x_n = \xi + \frac{\sqrt{2}}{n}$ eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \rightarrow \xi$ gegeben. Es gilt dann $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) \rightarrow 0$, wegen $f(\xi) \neq 0$ also $f(x_n) \not\rightarrow f(\xi)$.

Sei nun $\xi \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ und sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ mit $x_n \rightarrow \xi$. Zu zeigen ist, daß $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Für $q \in \mathbb{N}$ sei $\delta_q := \min_{p \in \mathbb{N}} \left| \xi - \frac{p}{q} \right|$. Dann gilt $\delta_q > 0$ für alle $q \in \mathbb{N}$ und damit folgt $\delta := \min_{q \leq \frac{1}{\varepsilon}} \delta_q > 0$. Nach Wahl von δ gilt für

$x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$ mit $|x - \xi| < \delta$, daß aus $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd $q > \frac{1}{\varepsilon}$ und damit $|f(x)| = \frac{1}{q} < \varepsilon$ folgt. Außerdem gilt natürlich $|f(x)| = 0 < \varepsilon$ für $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{Q}$ und damit insgesamt $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ mit $|x - \xi| < \delta$. Nun existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für $n \geq N$. Es folgt $|f(x_n)| < \varepsilon$ für $n \geq N$, also $f(x_n) \rightarrow 0 = f(\xi)$. \square

Satz 3.1.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $\xi \in M$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so daß für jedes $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ ist.

In Quantorenschreibweise lautet die hier angegebene, zur Stetigkeit in ξ äquivalente, Bedingung wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x \in M : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Man nimmt diese Bedingung oft auch zur Definition der Stetigkeit.

Beweis von Satz 3.1.2. “ \Leftarrow ”. Die “ ε - δ -Bedingung” sei erfüllt und es sei (x_n) Folge in M mit $x_n \rightarrow \xi$. Zu zeigen ist, daß $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so daß für alle $x \in M$

$$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

gilt. Wegen $x_n \rightarrow \xi$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für $n \geq N$. Es folgt $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ für $n \geq N$.

“ \Rightarrow ”. Wir zeigen die Kontraposition und nehmen an, daß die “ ε - δ -Bedingung” nicht erfüllt ist. Dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \exists x \in M : |x - \xi| < \delta \wedge |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon.$$

Insbesondere existiert dann zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon$. Es folgt $x_n \rightarrow \xi$ und $f(x_n) \not\rightarrow f(\xi)$. Damit ist f nicht stetig in ξ . \square

3.2 Der Zwischenwertsatz

Satz 3.2.1 (Zwischenwertsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $\eta \in \mathbb{R}$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d. h., es gilt entweder $f(a) < \eta < f(b)$ oder $f(b) < \eta < f(a)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \eta$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(a) < \eta < f(b)$. Es sei $M := \{t \in [a, b] : f(t) \leq \eta\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ wegen $a \in M$. Außerdem ist M durch b nach oben beschränkt und damit existiert $\xi := \sup M$. Nun existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \rightarrow \xi$. Da f stetig, folgt $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Wegen $f(x_n) \leq \eta$ ergibt sich $f(\xi) \leq \eta$, also $\xi \in M$. Wegen $b \notin M$ existiert auch eine Folge (y_n) in $(\xi, b] \cap [a, b] \setminus M$ mit $y_n \rightarrow \xi$, etwa $y_n := \xi + \frac{b - \xi}{n}$. Es folgt $f(y_n) \rightarrow f(\xi)$, wegen $f(y_n) > \eta$ also $f(\xi) \geq \eta$. Insgesamt ergibt sich $f(\xi) = \eta$. \square

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x + x$, hat eine Nullstelle in $(-1, 0)$, d. h., es existiert $\xi \in (-1, 0)$ mit $f(\xi) = 0$. Denn f ist stetig in $\mathbb{R} \supset [-1, 0]$ und $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ und $f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$.

Eine andere Formulierung von Satz 3.2.1 ist die folgende: ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ falls $f(a) < f(b)$ und $[f(b), f(a)] \subset f([a, b])$ falls $f(b) < f(a)$.

Satz 3.2.2 Sei I Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.

Ist f konstant, so besteht $f(I)$ aus einem Punkt. Wir haben konstante Funktionen in Satz 3.2.2 ausgeschlossen, da wir einpunktige Mengen nicht als Intervalle betrachtet haben.

Beweis von Satz 3.2.2. Sei $\alpha := \inf f(I)$ und $\beta := \sup f(I)$ (wobei die Werte $\pm\infty$ zugelassen sind). Dann gilt $\alpha < \beta$, da f nicht konstant. Wir zeigen, daß $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Sei dazu $\eta \in (\alpha, \beta)$, also $\alpha < \eta < \beta$. Dann existieren $a, b \in I$ mit $\alpha \leq f(a) < \eta < f(b) \leq \beta$. (Es muß nicht $a < b$ gelten.) Nach Zwischenwertsatz existiert $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$. Es folgt $\eta \in f(I)$, also $(\alpha, \beta) \subset f(I)$.

Da aber für $\eta > \beta$ und $\eta < \alpha$ sicher $\eta \notin f(I)$ gilt, ergibt sich, daß $f(I)$ eines der vier Intervalle (α, β) , $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ und $[\alpha, \beta]$ ist. \square

Beispiel. Für $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, gilt $f((-1, 1)) = [0, 1)$.

6.1.2000

Satz 3.2.3 Seien I, J Intervalle und sei $f : I \rightarrow J$ stetig und surjektiv. Ist f streng monoton steigend (bzw. fallend), so ist f bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton steigend (bzw. fallend).

Beweis. Zunächst folgt aus der strengen Monotonie von f die Injektivität und damit die Bijektivität von f . Desweiteren sieht man unmittelbar, daß f^{-1} ebenfalls streng monoton ist.

Wir zeigen jetzt, daß f^{-1} stetig ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f streng monoton steigend. Sei $\eta \in J = f(I)$ und $\xi := f^{-1}(\eta)$. Wir betrachten zunächst den Fall, daß ξ kein "Randpunkt" von I ist. Dann existiert $r > 0$ mit $[\xi - r, \xi + r] \subset I$. Sei nun $0 < \varepsilon \leq r$. Wir setzen $\delta := \min\{f(\xi + \varepsilon) - \eta, \eta - f(\xi - \varepsilon)\}$. Für $y \in J$ mit $|y - \eta| < \delta$ gilt dann

$$f(\xi - \varepsilon) \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq f(\xi + \varepsilon)$$

und damit wegen der strengen Monotonie $\xi - \varepsilon < f^{-1}(y) < \xi + \varepsilon$, also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon$. Damit ist f^{-1} stetig in η .

Den Fall, daß ξ Randpunkt von I ist, kann man ähnlich behandeln. Ist etwa $I = [\xi, b]$, so wählt man $\delta := f(\xi + \varepsilon) - \eta$ für $0 < \varepsilon \leq b - \xi$. Wir verzichten auf die Details.

Beispiel. Es sei $a > 1$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto a^x$. Dann ist f streng monoton steigend, stetig und bijektiv. Damit existiert die Umkehrfunktion und sie ist ebenfalls stetig und streng monoton steigend. Sie heißt *Logarithmus zur Basis a* und wird mit \log_a bezeichnet. Im Falle $a = e$ nennen wir sie *natürlicher Logarithmus* oder einfach *Logarithmus* und schreiben $\log x$ oder $\ln x$ statt $\log_e x$. Der Fall $0 < a < 1$ ist analog. Hier sind f und f^{-1} streng monoton fallend.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ gilt also $a^{\log_a b} = b$ und $e^{\ln c} = c$. Für $u \in \mathbb{R}_+$ und $v \in \mathbb{R}$ ist damit

$$u^v = (e^{\ln u})^v = e^{v \cdot \ln u} = \exp(v \cdot \ln u).$$

Dies zeigt einerseits, daß für $a > 0$ die durch $x \mapsto x^a$ definierte Funktion $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ stetig ist. Zum anderen legt es für $a \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ die Definition $a^z := \exp(z \cdot \ln a)$ nahe. Die durch $z \mapsto a^z$ definierte Funktion von \mathbb{C} nach \mathbb{C} ist dann ebenfalls stetig.

3.3 Offene und abgeschlossene Mengen

In §2.1 hatten wir für $a \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ die ε -Umgebung von a definiert. Wir bezeichnen diese jetzt mit $U(a, \varepsilon)$, also $U(a, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$. Die Bezeichnungen in der Literatur sind hier sehr uneinheitlich, statt $U(a, \varepsilon)$ findet man auch $B(a, \varepsilon)$, $K(a, \varepsilon)$, $D(a, \varepsilon)$, $U_\varepsilon(a)$, $B_\varepsilon(a)$, $K_\varepsilon(a)$ und anderes.

Weiter hatten wir $U \subset \mathbb{C}$ Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ genannt, wenn $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U(a, \varepsilon) \subset U$ existiert.

Satz 3.3.1 *Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ Funktion und $\xi \in \mathbb{C}$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn zu jeder Umgebung U von $f(\xi)$ eine Umgebung V von ξ existiert mit $f(V \cap M) \subset U$.*

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung der Stetigkeit durch die ε - δ -Bedingung (Satz 3.1.2). Alternativ könnten wir auch die Definition der Stetigkeit und die Charakterisierung der Folgenkonvergenz über Umgebungen benutzen.

“ \Leftarrow ”. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Umgebung V von ξ mit $f(V \cap M) \subset U(f(\xi), \varepsilon)$. Weiter existiert $\delta > 0$ mit $U(\xi, \delta) \subset V$. Für $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$ folgt dann $x \in U(\xi, \delta) \cap M \subset V \cap M$ und damit $f(x) \in f(V \cap M) \subset U(f(\xi), \varepsilon)$, also $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.

“ \Rightarrow ”. Sei U Umgebung von $f(\xi)$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(f(\xi), \varepsilon) \subset U$. Da f stetig in ξ , existiert $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ für alle $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$. Mit $V := U(\xi, \delta)$ folgt dann $f(V \cap M) \subset U(f(\xi), \varepsilon) \subset U$. \square

Definition 3.3.1 Sei $A \subset \mathbb{C}$. Dann heißt A *offen*, falls A Umgebung jedes Punktes von A ist, d. h., falls zu jedem $a \in A$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U(a, \varepsilon) \subset A$ existiert.

Für $A \subset B \subset \mathbb{C}$ und $a \in A$ heißt A *(Relativ-)Umgebung von a (in B)*, falls $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U(a, \varepsilon) \cap B \subset A$ existiert.

Weiter heißt A *(relativ) offen (in B)*, falls A Relativumgebung jedes Punktes von A ist, d. h., falls zu jedem $a \in A$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit $U(a, \varepsilon) \cap B \subset A$ existiert.

Schließlich heißt $a \in A$ *innerer Punkt* von A , falls A (Relativ-)Umgebung von a ist. Die Menge der inneren Punkte von A heißt *Inneres* (englisch: interior) von A (bzgl. B) und wird mit $\text{int}(A)$ bezeichnet.

Bemerkungen. 1. Wir lassen die Zusätze “relativ” und “in B ” häufig weg, wenn die Menge B aus dem Zusammenhang klar hervorgeht. Dies ist insbesondere dann oft der Fall, wenn $B = \mathbb{R}$ gilt. (Der in §2.1 definierte Begriff einer Umgebung in \mathbb{R} stimmt dann mit dem hier definierten Umgebungsbegriff überein.)

2. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist das offene Intervall (a, b) offen in \mathbb{R} , denn ist $x \in (a, b)$ und $\varepsilon := \min\{x - a, b - x\}$, so gilt $U(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$. Ebenso sieht man, daß auch die unbeschränkten offenen Intervalle offen im Sinne von Definition 3.3.1 sind.

Für das Innere von Intervallen bzgl. \mathbb{R} gilt $\text{int}([a, b]) = \text{int}([a, b)) = \text{int}((a, b]) = \text{int}((a, b)) = (a, b)$.

Setzt man $W := V \cap M$ in Satz 3.3.1, so erhält man, daß f genau dann stetig in ξ ist, wenn für jede Umgebung U von $f(\xi)$ eine Relativumgebung W (in M) von ξ existiert, so daß $f(W) \subset U$ gilt. Letzteres ist aber offensichtlich genau dann der Fall, wenn $f^{-1}(U)$ selbst Relativumgebung von ξ ist. Wir formulieren dieses Ergebnis als Satz.

Satz 3.3.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ Funktion.

- (i) Sei $\xi \in M$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn für jede Umgebung U von $f(\xi)$ das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Relativumgebung (in M) von ξ ist.
- (ii) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn für jedes offene $U \subset \mathbb{C}$ das Urbild $f^{-1}(U)$ relativ offen (in M) ist.

Die Aussage (i) wurde bereits vor der Formulierung des Satzes bewiesen, und (ii) folgt leicht daraus.

Man kann die in den beiden obigen Sätzen formulierten Eigenschaften benutzen, um Stetigkeit in allgemeinerem Rahmen (Topologie) zu definieren.

Definition 3.3.2 Sei $A \subset \mathbb{C}$. Dann heißt A abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist. Für $A \subset B \subset \mathbb{C}$ heißt A (relativ) abgeschlossen (in B), falls $B \setminus A$ relativ offen in B ist.

Satz 3.3.3 Es ist $A \subset \mathbb{C}$ genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge in A auch ihr Grenzwert in A ist.

Beweis. “ \Rightarrow ”. Sei A abgeschlossen und x_n Folge in A mit $x_n \rightarrow \xi$. Zu zeigen ist, daß $\xi \in A$. Dazu nehmen wir an, daß $\xi \in \mathbb{C} \setminus A$. Da $\mathbb{C} \setminus A$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus A$, also $|x - \xi| \geq \varepsilon$ für alle $x \in A$, insbesondere damit $|x_n - \xi| \geq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $x_n \not\rightarrow \xi$, ein Widerspruch.

“ \Leftarrow ”. Wir nehmen an, daß A nicht abgeschlossen ist, also $\mathbb{C} \setminus A$ nicht offen ist. Damit existiert $\xi \in \mathbb{C} \setminus A$, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, daß $U(\xi, \varepsilon) \not\subset \mathbb{C} \setminus A$, also $U(\xi, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Insbesondere existiert dann $x_n \in U(\xi, \frac{1}{n}) \cap A$. Es folgt $x_n \rightarrow \xi$ mit $x_n \in A$, aber $\xi \notin A$, ein Widerspruch. \square

10.1.2000

Satz 3.3.4 Sei $A \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und nach oben (bzw. unten) beschränkt. Dann hat A ein Maximum (bzw. Minimum).

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei A nach oben beschränkt. Dann existiert eine Folge $a_n \in A$ mit $a_n \rightarrow \sup A$. Wegen A abgeschlossen und Satz 3.3.3 folgt $\sup A \in A$ und daraus die Behauptung. \square

Satz 3.3.5 (i) Vereinigungen offener Mengen sind offen und Durchschnitte von endlich vielen offenen Mengen sind offen.

- (ii) Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen und Vereinigungen von endlich vielen abgeschlossenen Mengen sind abgeschlossen.

Beweis. (i). Sei M Menge offener Mengen und $V = \bigcup_{U \in M} U$. Zu zeigen ist, daß V offen ist. Sei dazu $\xi \in V$. Dann existiert $U \in M$ mit $\xi \in U$. Damit ist U Umgebung von ξ , und wegen $V \supset U$ also auch V Umgebung von ξ .

Seien jetzt U_1, \dots, U_n offen und $V = \bigcap_{j=1}^n U_j$. Sei $\xi \in V$. Dann ist $\xi \in U_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ und damit existiert $\varepsilon_j > 0$ mit $U(\xi, \varepsilon_j) \subset U_j$. Mit $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ folgt $U(\xi, \varepsilon) \subset U_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$, also $U(\xi, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^n U_j = V$. Also ist V offen.

- (ii) folgt aus (i) und den Regeln von de Morgan. \square

Beispiele. 1. Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen im Sinne von Definition 3.3.2.

2. Halboffene Intervalle sind weder offen noch abgeschlossen.

3. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ ist offen, $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ist abgeschlossen und $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ und } \operatorname{Im} z > 0\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

3.4 Kompakte Mengen

Definition 3.4.1 Sei $K \subset \mathbb{C}$. Dann heißt K *kompakt*, falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt.

Satz 3.4.1 Eine Teilmenge von \mathbb{C} ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. “ \Leftarrow ”. Sei $K \subset \mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt und sei (x_n) Folge in K . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat dann (x_n) eine konvergente Teilfolge. Nach Satz 3.3.3 liegt der Grenzwert dieser Teilfolge in K .

“ \Rightarrow ”. Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Um zu zeigen, daß K abgeschlossen ist, benutzen wir wieder Satz 3.3.3. Sei dazu (x_n) konvergente Folge in K , etwa $x_n \rightarrow \xi$. Zu zeigen ist, daß $\xi \in K$. Dies folgt aber aus der Kompaktheit von K , da jede Teilfolge von (x_n) ebenfalls gegen ξ konvergiert.

Um zu zeigen, daß K beschränkt ist, nehmen wir an, daß das nicht der Fall ist. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $|x_n| > n$. Es ist dann jede Teilfolge von (x_n) unbeschränkt und damit divergent. Also hat (x_n) keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch. \square

Folgerung 3.4.1 Durchschnitte kompakter Mengen und endliche Vereinigungen kompakter Mengen sind kompakt.

Zum *Beweis* muß man lediglich Satz 3.4.1 mit Satz 3.3.5 kombinieren.

Beispiele. 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist das Intervall $[a, b]$ kompakt.

2. $A := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kompakt, da $(\frac{1}{n})$ Folge in A , $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, aber $0 \notin A$. Es ist aber $A \cup \{0\}$ kompakt.

3. Endliche Teilmengen von \mathbb{C} sind kompakt.

Satz 3.4.2 Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Beweis. Sei (y_n) Folge in $f(K)$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \in K$ mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da K kompakt, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) und $\xi \in K$ mit $x_{n_k} \rightarrow \xi$. Da f stetig in ξ , folgt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi) \in f(K)$. \square

Ist $K \subset M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in K , so ist auch $f|_K$ stetig; vgl. Übung. Für kompaktes K kann dann Satz 3.4.2 auf $f|_K$ angewandt werden, und man erhält, daß $f(K)$ kompakt ist. Eine analoge Bemerkung gilt für den folgenden Satz.

Satz 3.4.3 Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an, d. h., es existieren $\alpha, \beta \in K$ mit $f(\alpha) = \min f(K)$ und $f(\beta) = \max f(K)$.

Beweis. Es ist $f(K)$ kompakt nach Satz 3.4.2, und damit beschränkt und abgeschlossen nach Satz 3.4.1. Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 3.3.4. \square

Definition 3.4.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig* falls zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so daß für alle $x, y \in M$ mit $|x - y| < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist.

Für $K \subset M$ heißt f *gleichmäßig stetig in K* (oder *auf K*), falls $f|_K$ gleichmäßig stetig ist.

In Quantorenschreibweise lautet die in der Definition angegebene Eigenschaft wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in M : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zum Vergleich betrachten wir noch einmal die ε - δ -Definition der Stetigkeit im Punkte x (Satz 3.1.2):

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall y \in M : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Im Unterschied zur gleichmäßigen Stetigkeit darf δ hier also nicht nur von ε , sondern auch noch von x abhängen. Insbesondere erkennt man, daß aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit folgt. (Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f in K folgt aber nicht die Stetigkeit von f in K , sondern nur die von $f|_K$.)

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Dann ist f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig in \mathbb{R} . Denn ist $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$, so gilt für $y := \frac{1}{\delta}$ und $x := y + \frac{\delta}{2}$, daß $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber

$$|f(x) - f(y)| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Satz 3.4.4 Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir nehmen an, daß f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \exists x, y \in K : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Insbesondere existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ damit $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Da K kompakt, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und $\xi \in K$ mit $x_{n_k} \rightarrow \xi$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ folgt auch $y_{n_k} \rightarrow \xi$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi)$ und $f(y_{n_k}) \rightarrow f(\xi)$, also $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \rightarrow 0$, im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. \square

3.5 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.5.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $\xi \in \mathbb{C}$. Dann heißt ξ *Häufungspunkt* von M , falls eine Folge (x_n) in $M \setminus \{\xi\}$ mit $x_n \rightarrow \xi$ existiert.

In obiger Definition ist sowohl $\xi \in M$ wie auch $\xi \notin M$ zugelassen.

Der Begriff des Häufungspunktes (einer Menge) sollte nicht mit dem Begriff des Häufungswerts (einer Folge) verwechselt werden.

Definition 3.5.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ Funktion. Wir sagen, daß $f(x)$ für $x \rightarrow \xi$ *konvergiert*, falls $\eta \in \mathbb{C}$ existiert, so daß für jede Folge (x_n) in $M \setminus \{\xi\}$ mit $x_n \rightarrow \xi$ auch $f(x_n) \rightarrow \eta$ gilt. Dieses η heißt dann *Grenzwert* von f für $x \rightarrow \xi$ und wird mit $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ bezeichnet.

Ist in obiger Definition $M \subset \mathbb{R}$ oder $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so können wir auch uneigentliche Grenzwerte zulassen, d. h., es kann $\xi = \pm\infty$ oder $\eta = \pm\infty$ sein.

Satz 3.5.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ Funktion. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$.

Hierbei bedeutet $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi)$ natürlich wieder, daß der Grenzwert existiert und den Wert $f(\xi)$ hat.

13.1.2000

Falls $\xi \in M$ gilt, aber ξ kein Häufungspunkt von M ist, so ist jede Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in ξ (denn für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \rightarrow \xi$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = \xi$ falls $n \geq N$).

Beweis von Satz 3.5.1. "⇐". Sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \rightarrow \xi$. Zu zeigen ist $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$. Dies ist trivial, falls ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = \xi$ für $n \geq N$ existiert. Andernfalls sei (x_{n_k}) die Teilfolge aller x_n mit $x_n \neq \xi$. Dann ist (x_{n_k}) Folge in $M \setminus \{\xi\}$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\xi)$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_{n_k}) - f(\xi)| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Sei jetzt $n \geq n_K$. Existiert dann $k \in \mathbb{N}$ mit $n = n_k$, so gilt $k \geq K$ und damit $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$. Ist aber $n \neq n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $x_n = \xi$, also $|f(x_n) - f(\xi)| = 0 < \varepsilon$. Es folgt $f(x_n) \rightarrow f(\xi)$.

"⇒". Diese Richtung ist trivial. □

Satz 3.5.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M , $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $\eta \in \mathbb{C}$. Dann ist die durch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M \setminus \{\xi\} , \\ \eta & \text{falls } x = \xi \end{cases}$$

definierte Funktion $F : M \cup \{\xi\} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann stetig in ξ , wenn $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ gilt.

Der *Beweis* folgt aus Satz 3.5.1, wenn man beachtet, daß $\lim_{x \rightarrow \xi} F(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ gilt. (Die letzte Gleichung ist dabei in dem Sinne zu verstehen, daß aus der Existenz des einen Grenzwertes die des anderen folgt, und daß die Grenzwerte dann den gleichen Wert haben.)

Ist $\xi \notin M$ und $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$, so heißt die in Satz 3.5.2 definierte Funktion F *stetige Ergänzung* (oder *stetige Fortsetzung*) von f (in ξ).

Für Grenzwerte von Summen, Produkten, usw. von Funktionen gelten wieder die üblichen Rechenregeln. Auch die ε - δ -Definition der Stetigkeit (angewandt auf die Funktion F von oben) überträgt sich entsprechend.

Satz 3.5.3 Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M , $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $\eta \in \mathbb{C}$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x \in M \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - \eta| < \varepsilon.$$

Beispiel. Es gilt $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$.

Beweis. Für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}.$$

Es folgt

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!} \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^j}{(j+1)!}.$$

Für $0 < |z| < 1$ gilt damit

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| \leq |z| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} = |z|(e-2).$$

Dies ergibt $\left| \frac{e^z - 1}{z} - 1 \right| < \varepsilon$ für $|z| < \min\left\{\frac{\varepsilon}{e-2}, 1\right\}$. \square

Satz 3.5.4 (Cauchy Kriterium für Funktionengrenzwerte) Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in M \setminus \{\xi\} : |x - \xi| < \delta \wedge |y - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis. “ \Rightarrow ”. Sei $\eta := \lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.5.3 existiert $\delta > 0$, so daß $|f(x) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x \in M \setminus \{\xi\}$ mit $|x - \xi| < \delta$. Für $x, y \in M \setminus \{\xi\}$ mit $|x - \xi| < \delta$ und $|y - \xi| < \delta$ folgt dann $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(\eta)| + |f(\eta) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

“ \Leftarrow ”. Sei (x_n) Folge in $M \setminus \{\xi\}$ mit $x_n \rightarrow \xi$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ mit der im Satz angegebenen Eigenschaft gewählt. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für $n \geq N$. Für $m, n \geq N$ folgt dann $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. Damit ist $(f(x_n))$ Cauchyfolge, also konvergent. Sei $\eta := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Ist nun (x'_n) eine Folge in $M \setminus \{\xi\}$ mit $x'_n \rightarrow \xi$, so existiert ebenfalls $\eta' := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$. Da aber auch $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots)$ eine Folge in $M \setminus \{\xi\}$ mit Grenzwert ξ ist, folgt $\eta' = \eta$ und damit die Behauptung. \square

Definition 3.5.3 Sei $M \subset \mathbb{R}$, ξ Häufungspunkt von $M_r := M \cap [\xi, \infty)$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Existiert dann $\eta_r := \lim_{x \rightarrow \xi} (f|_{M_r})(x)$, so heißt η_r *rechtsseitiger Grenzwert* von $f(x)$ für $x \rightarrow \xi$ und wird mit $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ bezeichnet.

Analog heißt $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow \xi} (f|_{M_l})(x)$ *linksseitiger Grenzwert* von $f(x)$ für $x \rightarrow \xi$ (falls er existiert), wobei $M_l := M \cap (-\infty, \xi]$.

Ist ξ Häufungspunkt von M_r , so ist ξ auch Häufungspunkt von M . Existiert dann $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$, so existiert auch $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ und die Werte sind gleich. Analoges gilt falls ξ Häufungspunkt von M_l ist.

Ist ξ Häufungspunkt von M_r und M_l , so existiert $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$ beide existieren und gleich sind. In diesem Falle gilt $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x)$.

Definition 3.5.4 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $\xi \in M$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Seien M_r und M_l wie in Definition 3.5.3. Dann heißt f *rechtsseitig stetig* in ξ falls $f|_{M_r}$ stetig in ξ ist und *linksseitig stetig* in ξ falls $f|_{M_l}$ stetig in ξ ist.

Ist ξ Häufungspunkt von M_r bzw. M_l , so erhält man aus Satz 3.5.1 unmittelbar, daß f genau dann rechts- bzw. linksseitig stetig in ξ ist, wenn $\lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x) = f(\xi)$ bzw. $\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi)$.

Weiter sieht man leicht ein, daß f genau dann stetig in ξ ist, wenn f rechts- und linksseitig stetig in ξ ist.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{falls } x < 0, \\ e^{\sqrt{x}} & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, daß f stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Außerdem gilt $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ wegen des Beispiels nach Satz 3.5.3 und $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = e^0 = 1$ da $f|_{[0, \infty)}$ stetig ist. Es folgt, daß f stetig in 0 ist.

Insgesamt ist f also stetig (in \mathbb{R}).

3.6 Folgen stetiger Funktionen

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann gilt $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$, wobei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Es ist hier f unstetig, aber alle f_n sind stetig.

Definition 3.6.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge von Funktionen von M nach \mathbb{C} . Dann heißt (f_n) *punktweise konvergent* gegen f , falls $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in M$ gilt, d. h., falls

$$\forall x \in M \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die Folge (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f , falls

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wir schreiben auch $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig (bzw. punktweise). Für $K \subset M$ heißt f gleichmäßig (bzw. punktweise) konvergent *in* K , falls $f|_K$ gleichmäßig (bzw. punktweise) konvergiert.

Seien $f_n, f, g_n, g : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt unmittelbar, daß aus der punktweisen Konvergenz von (f_n) gegen f und der der punktweisen Konvergenz von (g_n) gegen g auch die punktweise Konvergenz von $(f_n + g_n)$ gegen $f + g$, die von (cf_n) gegen cf und die von $(f_n \cdot g_n)$ gegen $f \cdot g$ folgt. Die dortigen Beweise zeigen, daß aus der der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f und (g_n) gegen g auch die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n + g_n)$ gegen $f + g$ und die von (cf_n) gegen cf folgt. Das entsprechende Resultat für $(f_n \cdot g_n)$ gilt nicht, wie das Gegenbeispiel $f_n = g_n = id_{\mathbb{R}} + \frac{1}{n}$ zeigt. Die entsprechende Aussage gilt aber, falls f und g beschränkt sind.

17.1.2000

Den folgenden Satz beweist man genauso wie bei Zahlenfolgen (vgl. Satz 2.3.4).

Satz 3.6.1 (Cauchy Kriterium für Funktionenfolgen) Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge von Funktionen von M nach \mathbb{C} . Dann konvergiert (f_n) genau dann gleichmäßig, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq N \wedge n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Satz 3.6.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge von Funktionen von M nach \mathbb{C} . Es gelte $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig. Sind dann alle f_n stetig (in $\xi \in M$), so ist f stetig (in $\xi \in M$).

Beweis. Sei $\xi \in M$ und seien alle f_n stetig in ξ . Zu zeigen ist, daß f stetig in ξ ist.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq N$. Da f_N stetig in ξ , existiert $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$. Es folgt für $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$, daß

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(\xi) + f_N(\xi) - f(\xi)| \\ &= |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\xi)| + |f_N(\xi) - f(\xi)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 3.6.1, Satz 3.6.2 sowie obige Bemerkungen gelten analog für Reihen (denn diese sind ja nichts anderes als Folgen).

Sind also etwa die Funktionen $f_k : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, so ist auch die durch $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definierte Funktion von M nach \mathbb{C} stetig. Insbesondere erhält man auch den folgenden Satz (vgl. Satz 2.6.4).

Satz 3.6.3 (Cauchy Kriterium für Funktionenreihen) Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei (f_k) eine Folge von Funktionen von M nach \mathbb{C} . Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ genau dann gleichmäßig, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Satz 3.6.4 (Majorantenkriterium) Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei (f_k) eine Folge von Funktionen von M nach \mathbb{C} . Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Existiert dann $L \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(x)| \leq c_k$ für alle $k \geq L$ und alle $x \in M$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{k=n+1}^m c_k| < \varepsilon$ für $m > n \geq N$. Es folgt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m c_k < \varepsilon$$

für $m > n \geq \max\{N, L\}$ und $x \in M$. Die Behauptung folgt aus dem Cauchy Kriterium für Funktionenreihen. \square

Satz 3.6.5 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius r . Es sei $0 < r \leq \infty$. Dann ist die durch $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ definierte Funktion $f : U(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Ist $0 < \rho < r$, so konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in $U(z_0, \rho)$.

Für $r = \infty$ ist dabei $U(z_0, \infty) := \mathbb{C}$ zu setzen.

Beweis von Satz 3.6.5. Es genügt die zweite Aussage zu beweisen, da hieraus die erste leicht mit Satz 3.6.2 folgt.

Sei dazu $0 < \rho < s < r$. Dann gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{s}$. Damit existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{s}$ für $k \geq K$. Für $z \in U(z_0, \rho)$ und $k \geq K$ folgt damit

$$\left| a_k(z - z_0)^k \right| = |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq \left(\frac{1}{s} \right)^k \rho^k = \left(\frac{\rho}{s} \right)^k.$$

Die Behauptung folgt nun mit $c_k := \left(\frac{\rho}{s}\right)^k$ aus Satz 3.6.4. \square

Zum *Beispiel* folgt aus obigem Satz, daß die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. (Dies wurde bereits im Beweis von Satz 2.9.5 benutzt.) Allgemeiner sieht man, daß für $a \in \mathbb{R}_+$ die durch $z \mapsto a^z := \exp(z \cdot \ln a)$ definierte Funktion von \mathbb{C} nach \mathbb{C} stetig ist.

3.7 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Definition 3.7.1 Die durch $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ und $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ definierten Funktionen von \mathbb{C} nach \mathbb{C} heißen *Cosinus* und *Sinus*.

Da \exp stetig ist, sind nach §3.1 auch \cos und \sin stetig. Wir stellen einige einfache Eigenschaften zusammen (dabei sind im folgenden immer $z, w \in \mathbb{C}$):

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Aus $e^{z+w} = e^z e^w$ erhält man mit kurzer Rechnung die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w, \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w. \end{aligned}$$

Mit $w = -z$ folgt insbesondere

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

(Hierbei steht $\cos^2 z$ für $(\cos z)^2$.) Weiterhin gilt

$$\cos z + i \sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = e^{iz}.$$

Die Potenzreihendarstellung des Cosinus erhält man wie folgt. Zunächst ist

$$\cos z = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i)^n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2} ([i^n + (-i)^n]) z^n$$

Für n ungerade folgt $\frac{1}{2}(i^n + (-i)^n) = 0$. Für n gerade, etwa $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, folgt $\frac{1}{2}(i^n + (-i)^n) = \frac{1}{2}((-1)^k + (-1)^k) = (-1)^k$. Es ergibt sich

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \dots$$

Analog folgt

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \dots$$

Insbesondere folgt, daß für $x \in \mathbb{R}$ auch $\cos x \in \mathbb{R}$ und $\sin x \in \mathbb{R}$ gilt. Weiter ist für $x \in \mathbb{R}$ auch $\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos x$, $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin x$ und $|e^{ix}| = 1$.

20.1.2000

Satz 3.7.1 *Der Cosinus hat im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle. Für $x \in [0, 1]$ gilt $\cos x > 0$.*

Beweis. Sei $x \in [0, 2]$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $c_k := \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. Dann gilt

$$c_{k+1} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!} \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} c_k \leq c_k.$$

Die Folge (c_k) ist also monoton fallend. Außerdem konvergiert sie gegen 0. Das Leibnizkriterium liefert nun einerseits, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k$ konvergiert, und andererseits, daß für die Summe s der Reihe und die Partialsummen s_n die Ungleichung $s_1 \leq s \leq s_2$ gilt. Die Konvergenzaussage ist nun nicht neu, denn wir kennen ja sogar schon die Summe $s = \cos x - 1$ der Reihe. Wir benutzen aber jetzt die Ungleichung für die Partialsummen und erhalten

$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 + s_1 \leq 1 + s = \cos x \leq 1 + s_2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Für $x \in [0, 1]$ folgt damit

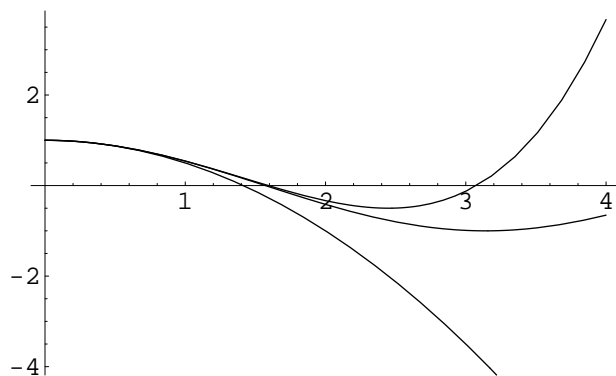
$$\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2 \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Weiter ist

$$\cos 2 \leq 1 - \frac{1}{2}2^2 + \frac{1}{24}2^4 = -\frac{1}{3} < 0.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus dem Zwischenwertsatz. \square

Der Graph des Cosinus und der oben benutzten Teilsummen seiner Potenzreihe sieht wie folgt aus:



Mit der im Beweis verwandten Methode kann man auch zeigen, daß $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6} > 0$ für $0 < x \leq 2$.

Wir benutzen jetzt obigen Satz zur Definition der “Kreiszahl” π .

Definition 3.7.2 $\pi := 2 \cdot \inf\{x \in [0, 2] : \cos x = 0\}$.

Sei $A := \{x \in [0, 2] : \cos x = 0\}$. Dann ist $A \neq \emptyset$ nach Satz 3.7.1 und damit ist π wohldefiniert.

Satz 3.7.2 Es ist $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ und für $z \in \mathbb{C}$ gilt $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$, $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$, $\sin(z + \pi) = -\sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2\pi) = \sin z$ und $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Beweis. Sei A wie oben. Wegen der Stetigkeit von \cos ist A abgeschlossen, also $\frac{\pi}{2} = \inf A \in A$, d. h., $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Wegen $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ folgt hieraus $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sin \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2} = \cos z.$$

Analog beweist man $\cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin z$. Hieraus folgen die weiteren Gleichungen leicht. Bei der letzten benutze man $e^z = \cos \frac{z}{i} + i \sin \frac{z}{i}$. \square

Satz 3.7.3 Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt $\cos z = 0$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ existiert, und es gilt $\sin z = 0$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = k\pi$ existiert.

Beweis. “ \Leftarrow ”. Dies ist klar nach Satz 3.7.2

“ \Rightarrow ”. Sei $\cos z = 0$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Nach Definition des Cosinus folgt dann $e^{iz} = -e^{-iz} = -\frac{1}{e^{iz}}$, also $(e^{iz})^2 = 1$, insbesondere $|e^{iz}| = 1$. Wegen $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = |e^{ix}e^{-y}| = |e^{ix}|e^{-y} = e^{-y}$ folgt $e^{-y} = 1$, also $y = 0$. Damit ist $z = x \in \mathbb{R}$.

Sei nun $k := \max\{j \in \mathbb{Z} : j\pi \leq x\}$ und $t := x - k\pi$. Dann gilt $0 \leq t < \pi$ und $\cos t = -\cos(t + \pi) = \cos(t + 2\pi) = \dots = (-1)^k \cos(t + k\pi) = (-1)^k \cos x = 0$. Nach Definition von π folgt $t \geq \frac{\pi}{2}$. Wegen $\cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\cos t = 0$ folgt aber auch $\pi - t \geq \frac{\pi}{2}$, insgesamt also $t = \frac{\pi}{2}$ und damit $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Die entsprechende Aussage für den Sinus folgt wegen $\sin z = -\cos \left(z + \frac{\pi}{2} \right)$. \square

Definition 3.7.3 Die durch $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ definierten Funktionen $\tan : \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\cot : \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ heißen *Tangens* und *Cotangens*.

Die Funktionen \tan und \cot sind stetig. Für z aus dem entsprechenden Definitionsbereich gilt $\tan(z + \pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z$ und analog $\cot(z + \pi) = \cot z$. Viele weitere Eigenschaften von Tangens und Cotangens lassen sich leicht aus denen von Cosinus und Sinus ableiten.

Definition 3.7.4 Die durch $\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$ und $\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$ definierten Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\sinh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tanh : \mathbb{C} \setminus \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\coth : \mathbb{C} \setminus \{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ heißen *Cosinus hyperbolicus*, *Sinus hyperbolicus*, *Tangens hyperbolicus* und *Cotangens hyperbolicus*.

Die hier definierten Funktionen heißen *hyperbolische Funktionen*, die in Definition 3.7.1 und 3.7.3 definierten Funktionen heißen *trigonometrische Funktionen*. Auch die hyperbolischen Funktionen sind wieder stetig.

Es gilt $\cosh z = \cos iz$, $\sinh z = -i \sin iz$, $\tanh z = -i \tan iz$ und $\coth z = i \cot iz$.

4 Differenzierbarkeit

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 4.1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M . Dann heißt f *differenzierbar in ξ* , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann *Ableitung* von f in ξ (oder an der Stelle ξ). Er wird mit $f'(\xi)$ oder $\frac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

Ist M' die Menge der Häufungspunkte von M , in denen f differenzierbar ist, so wird durch $x \mapsto f'(x)$ eine Funktion $f' : M' \rightarrow \mathbb{C}$ definiert, die *Ableitung* von f . Diese wird auch mit $\frac{df}{dx}$ bezeichnet.

Ist $A \subset M$, so heißt f *differenzierbar in A* falls $A \subset M'$. Ist $M' = M$, so heißt f *differenzierbar*.

Bemerkungen. 1. Für f' bzw. $f'(x)$ wird auch die (etwas problematische) Bezeichnung $\frac{df(x)}{dx}$ verwandt.

2. Die Idee ist (für reellwertiges f) natürlich folgende: durch $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ gegeben, und im Grenzwert $x \rightarrow \xi$ sollte man die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkte $(\xi, f(\xi))$ erhalten.

3. Auch bei Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sind in Definition 4.1.1 uneigentliche Grenzwerte (also $f'(\xi) = \pm\infty$) *nicht* zugelassen.

4. Man kann den Grenzwert in Definition 4.1.1 auch in der Form

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

schreiben.

Beispiele. 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.

Behauptung. Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots,$$

und daraus folgt für $h \rightarrow 0$ die Behauptung. \square

2. Sei $a \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ax}$ ($= \exp ax$).

Behauptung. Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(x) = ae^{ax}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ist

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{ax+ah} - e^{ax}}{h} = \frac{e^{ax}e^{ah} - e^{ax}}{h} = ae^{ax} \frac{e^{ah} - 1}{ah}.$$

Wegen $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (vgl. §3.5) folgt die Behauptung. \square

24.1.2000

Satz 4.1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M . Dann ist f genau dann differenzierbar in M , wenn eine in ξ stetige Funktion $q : M \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(\xi) + q(x)(x - \xi)$ für $x \in M$ existiert. Ist dies der Fall, so gilt $q(\xi) = f'(\xi)$.

Beweis. Sei $\eta \in \mathbb{C}$. Nach Satz 3.5.2 gilt

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = \eta$$

genau dann, wenn die durch

$$q(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} & \text{falls } x \in M \setminus \{\xi\}, \\ \eta & \text{falls } x = \xi \end{cases},$$

definierte Funktion $q : M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig in ξ ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

Satz 4.1.2 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M . Ist f differenzierbar in ξ , so ist f stetig in ξ .

Der Satz besagt also, daß differenzierbare Funktionen stetig sind. Sein *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 4.1.1.

Satz 4.1.3 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $\xi \in M$ Häufungspunkt von M , $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar in ξ und $c \in \mathbb{C}$. Dann sind $f + g$, $c \cdot f$, $f \cdot g$ und im Falle $g(\xi) \neq 0$ auch die (in $M \setminus g^{-1}(0)$ definierte) Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in ξ und es gilt

$$(i) \quad (f + g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi),$$

$$(ii) \quad (c \cdot f)'(\xi) = c \cdot f'(\xi),$$

$$(iii) \quad (f \cdot g)'(\xi) = f'(\xi) \cdot g(\xi) + f(\xi) \cdot g'(\xi),$$

$$(iv) \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{f'(\xi) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}.$$

Man nennt (iii) Produktregel und (iv) Quotientenregel.

Der *Beweis* von (i) und (ii) ist sehr einfach und hier ausgelassen. Zum Beweise von (iii) beachte man, daß für $x \neq \xi$

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(\xi)}{x - \xi} &= \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x - \xi} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(x) + f(\xi)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x - \xi} \\ &= \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} g(x) + f(\xi) \frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} \end{aligned}$$

gilt. Da $\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = g(\xi)$ wegen Satz 4.1.2, folgt hieraus die Behauptung.

Die Quotientenregel (iv) folgt auf ähnliche Weise. Wir verzichten auf die Details. \square

Beispiele. Wir schreiben im folgenden \cos statt $\cos|_{\mathbb{R}}$ und nennen diese Funktion auch wieder Cosinus. Wir benutzen eine entsprechende Konvention auch für die anderen trigonometrischen Funktionen.

1. Sinus und Cosinus sind differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Denn wegen $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$, Beispiel 2 zu Definition 4.1.1 und Satz 4.1.3, (i) und (ii), ist der Sinus differenzierbar und

$$\sin' x = \frac{1}{2i}(ie^{ix} - (-i)e^{-ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

für $x \in \mathbb{R}$. Analog zeigt man $\cos' = -\sin$.

2. Tangens und Cotangens sind differenzierbar mit $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ und $\cot' = -1 - \cot^2 = -\frac{1}{\sin^2}$. Dies folgt aus der Quotientenregel. Zum Beispiel ist

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2.$$

Satz 4.1.4 (Kettenregel) Seien $M, N, L \subset \mathbb{R}$, $N \subset L$, $g : M \rightarrow N$, $f : L \rightarrow \mathbb{C}$. Sei $\xi \in M$ Häufungspunkt von M und $g(\xi)$ Häufungspunkt von L . Sei g differenzierbar in ξ und sei f differenzierbar in $g(\xi)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in ξ und es gilt $(f \circ g)'(\xi) = f'(g(\xi))g'(\xi)$.

Beweis. Nach Satz 4.1.1 existieren in ξ bzw. $\eta := g(\xi)$ stetige Funktionen $p : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $q : L \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(x) = g(\xi) + (x - \xi)p(x)$ für $x \in M$ und $f(y) = f(\eta) + (y - \eta)q(y)$ für $y \in L$, und es gilt $g'(\xi) = p(\xi)$ und $f'(\eta) = q(\eta)$. Mit $y = g(x)$ folgt

$$(f \circ g)(x) = (f \circ g)(\xi) + (g(x) - g(\xi))q(g(x)) = (f \circ g)(\xi) + (x - \xi)p(x)q(g(x)).$$

Da die durch $x \mapsto p(x)q(g(x))$ definierte Funktion stetig in ξ ist und dort den Wert $p(\xi)q(g(\xi)) = g'(\xi)f'(g(\xi))$ hat, folgt mit Satz 4.1.1 die Behauptung. \square

Beispiele. 1. Die Funktion $\exp \circ \cos$ ist differenzierbar und

$$(\exp \circ \cos)'(x) = \exp'(\cos x) \cos' x = -e^{\cos x} \sin x.$$

2. Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in M$, so ist für $n \in \mathbb{N}$ auch $f^n : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ mit $(f^n)'(\xi) = n f^{n-1}(\xi) f'(\xi)$. Dies folgt aus der Kettenregel und Beispiel 1 zu Definition 4.1.1. Ist etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x$, so gilt $f'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$.

Wir haben Differenzierbarkeit hier nur für Funktionen mit Definitionsbereich in \mathbb{R} (und Zielbereich in \mathbb{C}) betrachtet. Läßt man in Definition 4.1.1 den Definitionsbereich in \mathbb{C} zu, so erhält man den Begriff der *komplexen Differenzierbarkeit*. Es sei angemerkt, daß die bisherigen Resultate über Differenzierbarkeit – mit denselben Beweisen – auch für komplexe Differenzierbarkeit gelten. (Auch die im folgenden Satz auftauchende Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt noch für komplexe Differenzierbarkeit.) Ansonsten treten bei der Untersuchung der komplexen Differenzierbarkeit aber ganz andere Phänomene auf wie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen mit Definitionsbereich in \mathbb{R} . Komplexe Differenzierbarkeit wird später (voraussichtlich in Analysis IV) ausführlich behandelt. Zuvor wird in Analysis II Differenzierbarkeit von Funktionen mit Definitionsbereich in \mathbb{R}^n (und Zielbereich in \mathbb{R}^m) untersucht. (Für Funktionen von Teilmengen von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{C} erhalten wir also zwei Differenzierbarkeitsbegriffe!)

Im folgenden untersuchen wir Differenzierbarkeit nur für auf Intervallen definierte Funktionen.

Satz 4.1.5 Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \rightarrow J$ stetig, streng monoton und surjektiv (und damit bijektiv nach Satz 3.2.3). Sei $\xi \in I$ und sei f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Beweis. Sei (y_n) Folge in $J \setminus \{\eta\}$ mit $y_n \rightarrow \eta$. Sei $x_n := f^{-1}(y_n)$. Da f^{-1} nach Satz 3.2.3 stetig ist, folgt $x_n \rightarrow f^{-1}(\eta) = \xi$. Wegen der Bijektivität von f ist auch $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} \rightarrow \frac{1}{f'(\xi)},$$

und daraus die Behauptung. \square

Beispiele. 1. Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, nach Satz 4.1.5 also differenzierbar mit

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R}_+$.

Hieraus erhält man, daß für $a \in \mathbb{C}$ die durch $x \mapsto x^a$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar ist und $f'(x) = ax^{a-1}$ gilt. Denn dies folgt wegen $f(x) = \exp(a \ln x)$ aus der Kettenregel:

$$f'(x) = a \exp(a \ln x) (\ln)'(x) = ax^a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Für $a \in \mathbb{N}$ ist dies das Beispiel 1 zu Definition 4.1.1.

2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist f streng monoton steigend, stetig und bijektiv. Außerdem ist f differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist gegeben durch $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ (wobei wir dies für $y < 0$ durch $y^{1/3} = -(-y)^{1/3}$ definiert haben). Für $y \neq 0$ erhält man mit Satz 4.1.5 (oder durch die Wahl $a = \frac{1}{3}$ im vorigen Beispiel) sofort $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$.

Für $y = 0$ ist aber $x := f^{-1}(y) = 0$, also $f'(x) = 0$, und damit Satz 4.1.5 nicht anwendbar. Tatsächlich sieht man leicht, daß

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = \frac{1}{y^{2/3}} \rightarrow \infty$$

für $y \rightarrow 0$, also f^{-1} nicht differenzierbar in 0 ist.

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muß nicht stetig sein. Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Wir zeigen: (i) f ist differenzierbar, (ii) f' ist nicht stetig.

zu (i): Mit Produkt- und Kettenregel folgt, daß f differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, mit

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Um die Differenzierbarkeit in 0 zu untersuchen, notieren wir zunächst, daß $|\sin t| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$ wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Es folgt

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

und damit

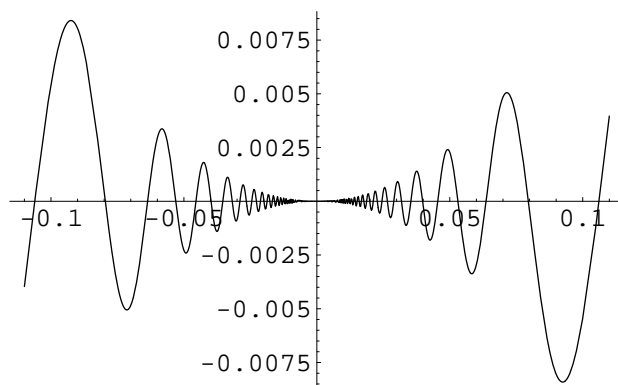
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

zu (ii): Sei $x_k = \frac{1}{2\pi k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_k \rightarrow 0$ und

$$f'(x_k) = 2x_k \sin 2\pi k - \cos 2\pi k = -1 \not\rightarrow 0 = f'(0).$$

Damit ist f' nicht stetig in 0.

Der Graph dieser Funktion sieht wie folgt aus:



Dieses Beispiel zeigt auch, daß die Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung problematisch sein kann.

27.1.2000

Definition 4.1.2 Sei I Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann heißt f *stetig differenzierbar*, falls f' stetig ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f *n-mal (stetig) differenzierbar*, falls die induktiv durch $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$, definierte n -te Ableitung $f^{(n)}$ existiert (und stetig ist). Man schreibt f'' statt $f^{(2)} = (f')'$ und f''' statt $f^{(3)}$.

Zum *Beispiel* ist der Cosinus beliebig oft differenzierbar mit $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = \sin$, $\cos^{(4)} = \cos$ und damit $\cos^{(4k)} = \cos$, $\cos^{(4k+1)} = -\sin$, $\cos^{(4k+2)} = -\cos$ und $\cos^{(4k+3)} = \sin$ für $k \in \mathbb{N}$.

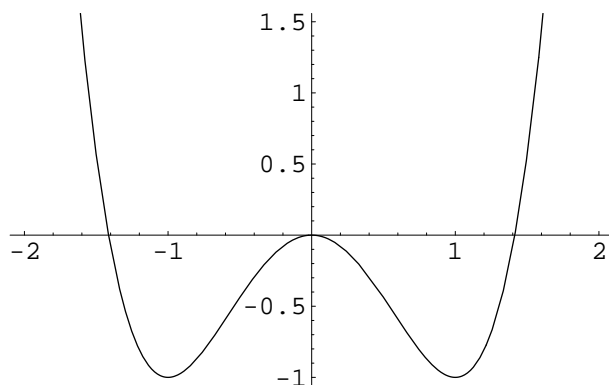
4.2 Der Mittelwertsatz

Definition 4.2.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi \in M$. Ist $f(\xi) = \max f(M)$, so sagt man, daß f in ξ ein *globales Maximum* hat. Existiert eine Umgebung U von ξ mit $f(\xi) = \max f(M \cap U)$, so sagt man, daß f in ξ ein *lokales Maximum* hat. Der Wert $f(\xi)$ wird dann als lokales Maximum bezeichnet.

Entsprechend spricht man von einem globalen bzw. lokalen Minimum. Ein *Extremum* ist ein Maximum oder Minimum.

Offensichtlich sind globale Extrema auch lokale Extrema (man wähle $U = \mathbb{C}$), aber nicht umgekehrt.

Man betrachte etwa $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2 - 1$.



Eine kurze Rechnung zeigt, daß diese Funktion in 0 ein lokales Maximum hat, aber daß sie kein globales Maximum besitzt. In 1 und -1 hat f ein globales (und lokales) Minimum.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existieren nach Satz 3.4.3 immer Punkte, in denen f sein globales Minimum und Maximum hat.

Satz 4.2.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und ξ innerer Punkt von I . Ist f differenzierbar in ξ und hat f in ξ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe f ein lokales Minimum in ξ . Dann existiert eine Umgebung U von ξ mit $f(x) - f(\xi) \geq 0$ für alle $x \in U \cap I$. Es folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

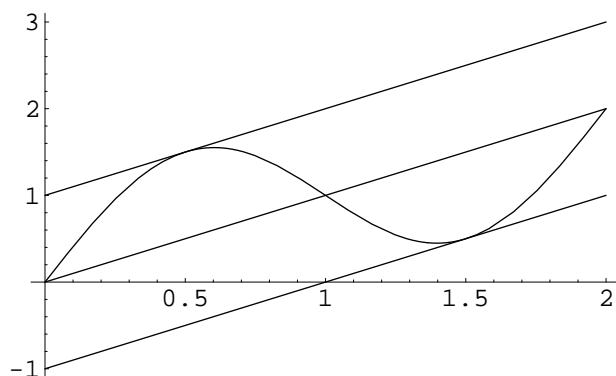
also $f'(\xi) = 0$. \square

Satz 4.2.2 (Mittelwertsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Mittelwertsatz hat eine einfache anschauliche Interpretation: es existiert ein Punkt, wo die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Im Beispiel $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(\pi x)$ haben $\xi = \frac{1}{2}$ und $\xi = \frac{3}{2}$ die verlangte Eigenschaft:



Ein Spezialfall des Mittelwertsatzes ist der folgende Satz.

Satz 4.2.3 (Satz von Rolle) Sind a, b, f wie in Satz 4.2.2 und ist außerdem noch $f(a) = f(b)$, so existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Wir beweisen zuerst diesen Spezialfall, und führen den allgemeinen Fall dann darauf zurück.

Beweis von Satz 4.2.3. Nach Satz 3.4.3 existieren $\alpha, \beta \in [a, b]$ so daß $f(\alpha) = \min f([a, b])$ und $f(\beta) = \max f([a, b])$. Nach Satz 4.2.1 folgt $f'(\alpha) = 0$ falls $\alpha \in (a, b)$ und $f'(\beta) = 0$ falls $\beta \in (a, b)$. Damit folgt die Behauptung, außer wenn $\{\alpha, \beta\} \subset \{a, b\}$. In diesem Fall ist aber wegen $f(a) = f(b)$ auch $f(\alpha) = f(\beta)$, also f konstant und damit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. \square

Beweis von Satz 4.2.2. Wir betrachten $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann gilt

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = h(a).$$

Nach Satz von Rolle existiert also $\xi \in (a, b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Ersetzt man $h(x)$ durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

mit einer Funktion g , wobei $g(a) \neq g(b)$, so erhält man folgendes Resultat.

Satz 4.2.4 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Hierbei folgt $g(a) \neq g(b)$ aus dem Satz von Rolle, angewandt auf g .

Der Satz von Rolle – und folglich der (verallgemeinerte) Mittelwertsatz – gelten *nicht* für komplexwertige Funktionen. Zum *Beispiel* gilt für $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$, daß $f(0) = f(2\pi) = 0$, aber $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ für alle x .

Es gilt aber immerhin noch der folgende Satz.

Satz 4.2.5 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit*

$$|f'(\xi)| \geq \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}.$$

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $f(a) = f(b)$. Andernfalls setzt man

$$q := \frac{|f(b) - f(a)|}{f(b) - f(a)}$$

und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{Re}(qf(x))$. Der Mittelwertsatz liefert $\xi \in (a, b)$ mit

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{|f(b) - f(a)|}{b - a}$$

und die Behauptung folgt wegen $|f'(\xi)| = |qf'(\xi)| \geq \operatorname{Re}(qf'(\xi)) = g'(\xi)$. \square

4.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Satz 4.3.1 *Sei I Intervall und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und in $\operatorname{int}(I)$ differenzierbar. Gilt dann $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Die Funktion $h := f - g$ ist stetig in I , differenzierbar in $\operatorname{int}(I)$ und erfüllt $h'(x) = 0$ für $x \in \operatorname{int}(I)$. Aus Satz 4.2.5 folgt $h(x) = h(y)$ für $x, y \in I$. Damit ist h konstant. \square

Satz 4.3.2 *Sei I Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $\operatorname{int}(I)$ differenzierbar. Dann ist f monoton wachsend falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$ und monoton fallend falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$. Falls $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$, so liegt strenge Monotonie vor.*

Beweis. Ist $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, so existiert nach Mittelwertsatz $\xi \in (x_1, x_2) \subset \operatorname{int}(I)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$. Daraus folgt die Behauptung. \square

31.1.2000

Beispiele. Es ist $\sin' = \cos$ und für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $\cos x > 0$. Damit ist $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ streng monoton steigend. Wegen $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ ist damit durch $x \mapsto \sin x$ eine bijektive Funktion von $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nach $[-1, 1]$ definiert; vgl. Satz 3.2.3. Ihre Umkehrfunktion heißt Arcus Sinus und wird mit \arcsin bezeichnet, also $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und es gilt

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

und

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{für } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Man beachte, daß die letzte Gleichung *nicht* für $x \in \mathbb{R} \setminus [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt. Nach Satz 3.2.3 ist \arcsin stetig und nach Satz 4.1.5 ist \arcsin differenzierbar in $(-1, 1)$ mit

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

für $x \in (-1, 1)$.

Analog definiert man die Umkehrfunktionen der anderen (auf geeignete Intervalle eingeschränkten) trigonometrischen Funktionen:

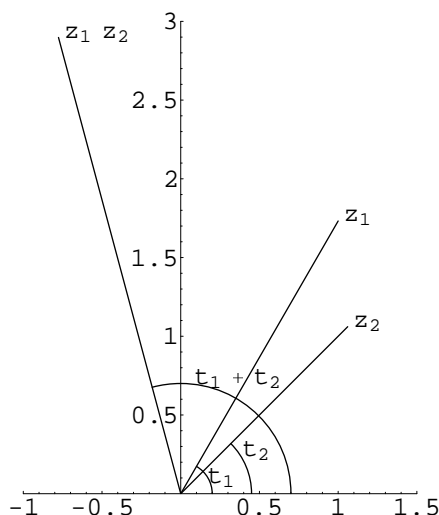
- $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in (-1, 1)$.
- $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.
- $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $\operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen kann man zeigen (Übung!), daß zu $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $w = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ existiert. Daraus folgt, daß man zu $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

findet. Man nennt dies die *Polarkoordinatendarstellung* von z und nennt φ das *Argument* von z .

Die Polarkoordinaten liefern eine geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen: mit $z_1 = r_1 e^{it_1}$ und $z_2 = r_2 e^{it_2}$ ist $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(t_1+t_2)}$. Im Beispiel etwa ist $z_1 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{3}{2}e^{i\pi/4} = \frac{3}{4}\sqrt{2}(1 + i)$ und $z_1 z_2 = 3e^{i7\pi/12}$.



Satz 4.3.3 Sei I Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\xi \in \operatorname{int}(I)$. Sei f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) = 0$. Dann gilt:

- Existieren $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha < \xi < \beta$, so daß f differenzierbar in (α, β) ist und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (\alpha, \xi)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (\xi, \beta)$ gilt, so hat f ein lokales Maximum in ξ .

- (ii) Existieren $\alpha, \beta \in I$ mit $\alpha < \xi < \beta$, so daß f differenzierbar in (α, β) ist und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (\alpha, \xi)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (\xi, \beta)$ gilt, so hat f ein lokales Minimum in ξ .

Existiert zusätzlich noch $f''(\xi)$, so gilt:

- (iii) Ist $f''(\xi) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in ξ .
 (iv) Ist $f''(\xi) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in ξ .

Beweis. (i) und (ii) folgen sofort aus Satz 4.3.2.

zu (iii): Wegen

$$0 > f''(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi} = \lim_{x \rightarrow \xi^+} \frac{f'(x)}{x - \xi}$$

existiert $\beta \in I$, $\beta > \xi$, mit $f'(x) < 0$ für $x \in (\xi, \beta)$. Analog existiert $\alpha \in I$ mit der geforderten Eigenschaft. Die Behauptung folgt jetzt aus (i).

Analog folgt (iv) aus (ii). \square

Beispiel. Sei $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{5-x}$. Dann ist f stetig und differenzierbar in $(0, 5)$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 \frac{1}{2\sqrt{5-x}}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}} \right).$$

Es gilt (für $0 < x < 5$)

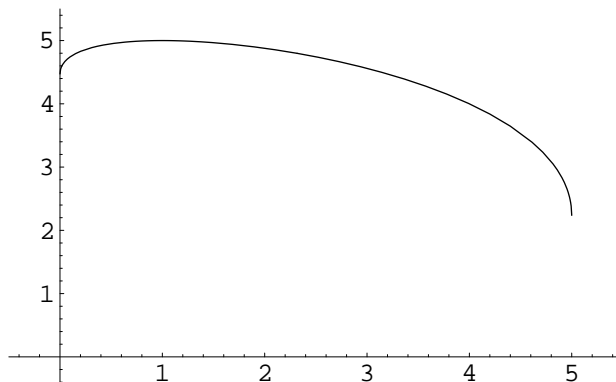
$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq \sqrt{5-x} \Leftrightarrow 4x < 5-x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$$

und analog

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 5) \quad \text{und} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Es folgt, daß f streng monoton steigend in $[0, 1]$ ist (d. h., $f|_{[0, 1]}$ ist streng monoton steigend), daß f streng monoton fallend in $[1, 5]$ ist und daß f in 1 ein lokales Maximum hat. Dieses ist sogar globales Maximum. Es gilt $f(1) = 5$. Das globale Minimum wird wegen $f(5) = \sqrt{5} < 2\sqrt{5} = f(0)$ in 5 angenommen, in 0 hat f ein lokales Minimum.

Der Graph von f sieht wie folgt aus:



Definition 4.3.1 Sei I Intervall. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

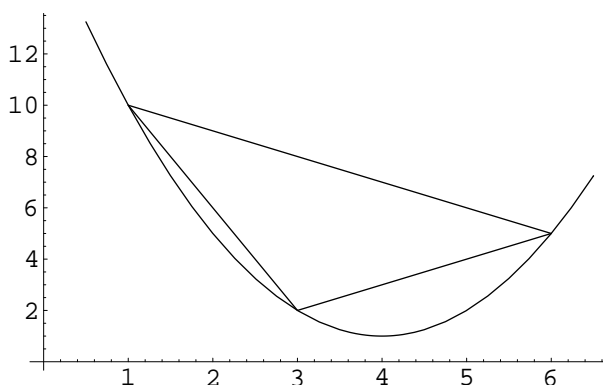
gilt. Gilt hier immer " $<$ ", so heißt f *streng konvex*. Gilt immer " \geq " bzw. " $>$ ", so heißt f (*streng*) *konkav*.

Die Bedingung in Definition 4.3.1 besagt, daß der Graph von f unterhalb der Sekanten liegt. Äquivalent ist, daß die Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x, f(x))$ kleinere Steigung hat als die durch $(x, f(x))$ und $(x_2, f(x_2))$, daß also

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

gilt.

Im *Beispiel* $f(x) = 1 + (x - 4)^2 = x^2 + 8x + 17$ ist dies für $x_1 = 1$, $x = 3$ und $x_2 = 6$ dargestellt.



Satz 4.3.4 Sei I Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und in $\text{int}(I)$ zweimal differenzierbar. Gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \text{int}(I)$, so ist f konvex. Gilt $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in \text{int}(I)$, so ist f konkav. Gilt immer " $>$ " bzw. " $<$ ", so liegt strenge Konvexität bzw. Konkavität vor.

Für den *Beweis* sei auf die Übung verwiesen.

Eine Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes führt auf das folgende Ergebnis.

Satz 4.3.5 (Regeln von de l'Hospital) Sei (a, b) offenes Intervall und seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$$

und existiert

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

so existiert auch

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt für den Grenzübergang $x \rightarrow b$.

Es sind $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen und die auftretenden Grenzwerte von f/g bzw. f'/g' können auch uneigentliche Grenzwerte sein.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, daß $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Wir betrachten die stetigen Ergänzungen $F, G : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in (a, b), \\ 0 & \text{falls } x = a \end{cases},$$

und

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in (a, b), \\ 0 & \text{falls } x = a \end{cases}$$

gegeben sind. Nach dem Satz von Rolle und wegen $G'(\xi) = g'(\xi) \neq 0$ für $\xi \in (a, b)$ gilt dann $g(x) = G(x) \neq G(a) = 0$ für $x \in (a, b)$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt für $x \in (a, b)$ dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem $\xi \in (a, x)$. Hieraus folgt die Behauptung, da mit $x \rightarrow a$ auch $\xi \rightarrow a$. \square 3.2.2000

Wir haben Satz 4.3.5 für einseitige Grenzwerte formuliert, aber daraus folgt natürliche eine entsprechende Aussage für allgemeine Grenzwerte unmittelbar.

Beispiele. 1. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} = 1,$$

denn wegen $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2} \rightarrow 1$ und $\tan'(x) = 1/\cos^2 x \rightarrow 1$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin' x}{\tan' x} = 1.$$

2. Wir untersuchen die Existenz des Grenzwertes

$$L := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\arctan x}.$$

Zunächst gilt,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - \ln(1+x)}{\ln(1+x) \arctan x},$$

falls L existiert. Nach Satz 4.3.5 folgt

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x} \arctan x + \ln(1+x) \frac{1}{1+x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{(1+x^2) \arctan x + (1+x) \ln(1+x)}, \end{aligned}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Auch dort konvergieren für $x \rightarrow 0$ wieder Zähler und Nenner gegen 0. Satz 4.3.5 liefert

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x}{2x \arctan x + 1 + \ln(1+x) + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x}{2x \arctan x + 2 + \ln(1+x)} \end{aligned}$$

falls der letzte Grenzwert existiert. Dies ist aber offensichtlich der Fall und der Grenzwert ist $\frac{1}{2}$. Wir erhalten $L = \frac{1}{2}$.

4.4 Folgen und Reihen differenzierbarer Funktionen

Satz 3.6.2 besagt, daß der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist. Wir beweisen ein analoges Resultat für Differenzierbarkeit.

Satz 4.4.1 Sei I beschränktes Intervall und (f_n) eine Folge von differenzierbaren Funktionen von I nach \mathbb{C} . Die Folge (f'_n) konvergiere gleichmäßig. Existiert dann $\alpha \in I$, so daß $(f_n(\alpha))$ konvergiert, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ und es gilt $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ für alle $x \in I$.

Der Satz besagt also, daß man unter den gemachten Voraussetzungen den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ mit der Differentiation (die ja auch eine Grenzwertbildung ist) vertauschen kann, daß also $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ gilt.

Man beachte, daß die letzte Gleichung nicht gelten muß, wenn $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig und f und alle f_n differenzierbar sind. Dies zeigt das Beispiel $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$. Hier gilt $f_n \rightarrow 0$ gleichmäßig, aber $f'_n(0) = \cos(n \cdot 0) = 1 \not\rightarrow 0$.

Beweis von Satz 4.4.1. Sei $a := \inf I$ und $b := \sup I$. Wir zeigen zunächst mit dem Cauchy Kriterium, daß (f_n) gleichmäßig konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Cauchy Kriterium für (f'_n) existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f'_m(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für $m, n \geq N_1$ und $x \in I$. Nach Cauchy Kriterium für $(f_n(\alpha))$ existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $m, n \geq N_2$. Nach Satz 4.2.5 gilt dann für $m, n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ und $x \in I$ mit einem $\xi \in I$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))| + |f_m(\alpha) - f_n(\alpha)|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \cdot |x - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist (f_n) gleichmäßig konvergent. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Wir zeigen jetzt, daß f differenzierbar ist und $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ gilt. Sei dazu $x \in I$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $F_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$F_n(y) = \begin{cases} \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} & \text{falls } y \neq x, \\ f'_n(x) & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Dann ist F_n stetig nach Satz 3.5.2. Nach Satz 4.2.5 existiert zu $y \in I$ wieder $\xi \in I$ mit

$$|F_m(y) - F_n(y)| \leq |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)|.$$

Hierbei wählt man $\xi = x$ falls $y = x$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f'_n) folgt nun die gleichmäßige Konvergenz von (F_n) . Damit ist nach Satz 3.6.2 die durch $y \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y)$ definierte Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Offensichtlich gilt

$$F(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} & \text{falls } y \neq x, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Aus Satz 3.5.2. folgt jetzt die Differenzierbarkeit von f in x ist und $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$. \square

Ist in obigem Satz I unbeschränkt, so gelten noch alle gemachten Behauptungen, außer daß (f_n) nicht mehr gleichmäßig konvergieren muß. Dies sieht man durch Einschränkung auf beschränkte Teilintervalle ein.

Wie bei Satz 3.6.2 gilt wieder ein Analogon für Reihen.

Satz 4.4.2 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ Potenzreihe mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für den Konvergenzradius r gelte $0 < r \leq \infty$. Sei $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ falls $r < \infty$ und $I = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$. Dann ist die durch $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ für $x \in I$.

Beweis. Wegen $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ ebenfalls Konvergenzradius r . Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n : I \rightarrow \mathbb{C}$, $g_n(x) = a_n(x - x_0)^n$. Dann gilt $g'_n(x) = n a_n(x - x_0)^{n-1}$. Sei $0 < \rho < r$ und $J := (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Nach Satz 3.6.5 konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} g'_n$ gleichmäßig in J . Außerdem konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_0)$ (zur Summe a_0 .) Mit Satz 4.4.1 (in der Version für Reihen) folgt, daß f differenzierbar in J ist mit $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$ für $x \in J$. Die Behauptung folgt für $\rho \rightarrow r$; vgl. Satz 3.6.5. \square

Beispiel. Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Der Konvergenzradius ist 1 (wegen $\sqrt[k]{k} \rightarrow 1$). Aus dem Leibnizkriterium erhält man, daß die Reihe sogar für $x \in [-1, 1]$ gleichmäßig konvergiert. Durch

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

wird also eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert. Diese ist nach Satz 4.4.2 differenzierbar in $(-1, 1)$ mit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x.$$

Mit Satz 4.3.1 und wegen $f(0) = 0 = \arctan 0$ folgt $f(x) = \arctan x$ für $x \in [-1, 1]$. Man beachte, daß die Reihe für f' nur in $(-1, 1)$ konvergiert, und auch dort nicht gleichmäßig.

Wegen $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ folgt insbesondere

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Diese Reihe wird auch nach Leibniz benannt.

Aus Satz 4.4.2 folgt, daß mit f, I wie dort die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist und daß

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ gilt. Insbesondere gilt $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Umgekehrt kann man nun für beliebig oft in x_0 differenzierbares f die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ bilden und sich fragen, ob sie zur Summe $f(x)$ konvergiert. Man nennt diese Reihe die *Taylorreihe* von f in x_0 und ihre Teilsummen *Taylorpolynome*.

Man beachte, daß aus der Konvergenz der Taylorreihe von f noch *nicht* folgen muß, daß ihre Summe $f(x)$ ist. Man betrachte etwa das *Beispiel* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

mit $x_0 = 0$. Man kann zeigen, daß f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit konvergiert die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ zur Summe 0.

Satz 4.4.3 Sei I Intervall, $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei n -mal differenzierbar in I und $(n+1)$ -mal differenzierbar in $\text{int}(I)$. Dann existiert ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Der Spezialfall $n = 0$ ist der Mittelwertsatz. Die Beweisidee hier ist ähnlich.

Beweis von Satz 4.4.3. Zunächst existiert $\rho \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{\rho}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Zu zeigen ist, daß ρ von der Form $\rho = f^{(n+1)}(\xi)$ ist. Sei dazu $F : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{\rho}{(n+1)!} (x - t)^{n+1}.$$

Dann ist F stetig in I und differenzierbar in $\text{int}(I)$ und eine kurze Rechnung zeigt, daß

$$F'(t) = \frac{(x - t)^n}{n!} (f^{(n+1)}(t) - \rho).$$

Weiter gilt $F(x_0) = F(x) = 0$ und nach dem Satz von Rolle existiert ξ zwischen x_0 und x mit $F'(\xi) = 0$. \square

Beispiel. Sei $f : (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ und $f'''(x) = 2/x^3$. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, daß

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Sei

$$R_n(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \ln x - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x - 1)^k.$$

Für $x \in (1, 2]$ existiert dann $\xi \in (1, x)$ mit

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\frac{x-1}{\xi} \right)^{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Es folgt $R_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und damit

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x - 1)^k$$

für $x \in (1, 2]$. Insbesondere gilt

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Für $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ gilt $\frac{1}{2} \leq x < \xi < 1$ und obiges Argument liefert wieder $R_n(x) \rightarrow 0$. Tatsächlich gilt dies (und damit obige Potenzreihenentwicklung des Logarithmus) für $x \in (0, 2]$, aber für $x \in (0, \frac{1}{2})$ können wir dies mit unserer Darstellung des Restglieds $R_n(x)$ noch nicht zeigen.