Analysis I

Walter Bergweiler

WS 2011/12
Fassung vom 17. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

“Was ist Mathematik?” Dies ist der Titel eines (lesenswerten) Buches von R. Courant und H. Robbins. Die Antwort ist nicht einfach, und das genannte Buch gibt sie, indem es in mathematische Methoden und Denkweisen einführt. Wir verzichten auf eine “Definition” des Begriffs “Mathematik”, sondern begnügen uns zunächst mit der Feststellung, dass die Mathematik eine Wissenschaft ist, die Aussagen über (abstrakte) Objekte wie Zahlen, Mengen, Funktionen, usw. macht.

Die Vorgehensweise ist dabei folgende: Man beginnt mit gewissen Grundaussagen, den sogenannten *Axiomen*. Neue Aussagen gewinnt man aus diesen Axiomen (und bereits gewonnenen Aussagen) durch logisches Schließen. Eine so gewonnene Aussage nennt man *Satz* (oder auch Theorem), in manchen Fällen auch *Hilfssatz* (Lemma), *Folgerung* (Korollar) oder ähnlich. Die Herleitung einer solchen Aussage durch logisches Schließen nennt man *Beweis*. Die Festlegung eines neuen Begriffs nennt man *Definition*.

Was ist Analysis? Auch auf eine Definition des Begriffs “Analysis” soll hier verzichtet werden. Wir nennen lediglich einige der Grundbegriffe: reelle und komplexe Zahlen, Funktionen, Stetigkeit, Ableitung, Integral,... Wie die meisten anderen mathematischen Disziplinen hat auch die Analysis vielfältige Anwendungen. So bedient man sich etwa bei der mathematischen Beschreibung von Vorgängen in Naturwissenschaft und Technik oft der Sprache und Methoden der Analysis. Stellt man beispielsweise die Position eines beweglichen Teilchens als Funktion der Zeit dar, so ist seine Geschwindigkeit durch die Ableitung und seine Beschleunigung durch die zweite Ableitung gegeben.

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

(Mathematische) Aussagen können wahr (w) oder falsch (f) sein:

- 2+3=4 (f)
- 7 ist eine Primzahl (w)

Es muss nicht bekannt sein, ob eine Aussage wahr oder falsch ist:

- Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n, so dass n und $n+2$ beide Primzahlen sind (?)

Die Verneinung (Negation) einer Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet; gesprochen ”nicht A”. Es ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Aus Aussagen A und B lassen sich durch die folgenden Operationen neue Aussagen gewinnen:

- $A \wedge B$, gesprochen “A und B”: wahr genau dann, wenn A und B beide wahr sind.
- $A \vee B$, gesprochen “A oder B”: wahr genau dann, wenn mindestens eine der Aussagen A, B wahr ist.

- $A \Rightarrow B$, gesprochen “aus A folgt B”, “A impliziert B” oder “wenn A, dann B”: nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch; gleichbedeutend mit $\neg A \vee B$. (Mit $\neg A \vee B$ ist hier $(\neg A) \vee B$ und nicht $(\neg A \vee B)$ gemeint.) Man schreibt auch $B \Leftarrow A$ statt $A \Rightarrow B$.
- $A \Leftrightarrow B$, gesprochen “A ist äquivalent zu B”: genau dann wahr, wenn A und B beide wahr oder beide falsch sind; gleichbedeutend mit $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Die Wahrheitswerte der Aussagen $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ sowie $A \Leftrightarrow B$ sind also durch die von A und B festgelegt. Man stellt dies auch in einer sogenannten Wahrheitstafel dar:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w	w

Man erkennt hier die Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg A \vee B$. Anders gesagt, die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$ ist immer wahr, unabhängig vom Wahrheitswert von A und B.

Ebenso erkennt man, dass $A \Rightarrow B$ immer dann wahr ist, wenn A falsch ist. Aus einer falschen Aussage kann also jede Aussage gefolgert werden!

Schließlich beachte man, dass $A \vee B$ auch dann wahr ist, wenn A und B beide gelten. In der Mathematik ist mit “oder” also immer das “einschließende oder” und nicht “entweder-oder, aber nicht beides” gemeint.

Mathematische Sätze haben in der Regel die Form $A \Rightarrow B$. Dann heißt A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*. Man sagt auch, dass A eine *hinreichende Bedingung* für B ist und B eine *notwendige Bedingung* für A ist.

Gleichbedeutend mit $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$. Hiervon überzeugt man sich anhand der Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

Die Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$ heißt *Kontraposition* der Aussage $A \Rightarrow B$. Die Kontraposition der (wahren) Aussage “Wenn eine natürliche Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar” lautet beispielsweise: “Wenn eine natürliche Zahl nicht durch 3 teilbar ist, so ist sie auch nicht durch 9 teilbar”.

Die Gültigkeit der folgenden Aussagen verifiziert man leicht durch Aufstellen der Wahrheitstafel. Dabei sind A, B und C beliebige Aussagen.

(i) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

(ii) $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

(iii) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

(iv) $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

(v) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(vi) $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(vii) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

(viii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

(ix) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Man nennt (i) und (ii) *Kommutativgesetz*, (iii) und (iv) *Assoziativgesetz* sowie (v) und (vi) *Distributivgesetz*. Aufgrund des Assoziativgesetzes kann man bei den Ausdrücken $A \wedge B \wedge C$ sowie $A \vee B \vee C$ also auf Klammern ganz verzichten.

Zum Beweis eines Satzes der Form "A$\Rightarrow B$" gibt es zwei Möglichkeiten.

Direkter Beweis. Man findet Aussagen $A_1, A_2, ..., , A_n$ mit

$$(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge ... \wedge (A_n \Rightarrow B).$$

Man schreibt dies auch kurz als

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ... \Rightarrow A_n \Rightarrow B.$$

Man überzeugt sich (durch die Wahrheitstafel), dass $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)$ tatsächlich $A \Rightarrow B$ impliziert, d.h., es gilt

$$((A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

für Aussagen A, A_1, B. Dies ist obige Situation falls $n = 1$. Wir werden später sehen, wie man den Fall beliebiger natürlicher Zahlen n behandeln kann (vollständige Induktion).

Indirekter Beweis. Die einfachste Form des indirekten Beweises ist der direkte Beweis der *Kontraposition* $\neg B \Rightarrow \neg A$. Eine andere Form ist der *Beweis durch Widerspruch.* Man nimmt $A \wedge \neg B$ sowie eventuell weitere bekannte (wahre) Aussagen an, und erzielt ein Widerspruch zu bekannten (wahren) Aussagen. Formal zeigt man also mit wahren Aussagen C und D, dass $A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow \neg D$ gilt. (Man beachte, dass $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.)

1.2 Mengen

Nach G. Cantor (1895) ist eine *Menge* M eine "Zusammenfassung aus wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einer Gesamtheit".

Ist x ein Element der Menge M, so bezeichnen wir dies mit $x \in M$. Ist x kein Element von M, so schreiben wir $x \notin M$. Es gilt also $x \notin M \Leftrightarrow \neg(x \in M)$.

Mengen können durch explizite Angabe ihrer Elemente definiert werden. So ist $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ die aus den Elementen $x_1, ..., x_n$ bestehende Menge M. Mengen können auch durch die Eigenschaften ihrer Elemente definiert werden:

$$M = \{x : x \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

Zum Beispiel ist

$$\{x : x \text{ ist Primzahl } \wedge x \leq 10\} = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Die *leere Menge* ist die Menge, die kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Wir definieren einige weitere wichtige Mengen. Das Zeichen ":=" bedeutet hier und im folgenden "wird definiert als". (Bei der Definition von Aussagen benutzt man analog das Zeichen ":$\Leftrightarrow$".)

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$,
- $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, ...\} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p,\, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$ ist die Menge der rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* der Menge M, falls $x \in N$ impliziert, dass $x \in M$ gilt. Wir bezeichnen dies mit $N \subset M$ oder $M \supset N$. Insbesondere bei Benutzung der zweiten Schreibweise sagen wir auch, dass M *Obermenge* von N ist. Man beachte, dass $N = M$ zugelassen ist. Es gilt

$$N = M \Leftrightarrow (N \subset M) \wedge (M \subset N).$$

Zum Beispiel gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. (Dies ist eine verkürzte Schreibweise für $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}) \wedge (\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}) \wedge (\mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$.)

Weiter heißt N *echte Teilmenge* von M falls $N \subset M$ und $N \neq M$. Dafür benutzen wir die Schreibweise $N \subsetneq M$ oder $M \supsetneq N$. Analog spricht man auch von *echten Obermengen*. Es gilt auch $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Hinweis. Die Terminologie ist in der Literatur uneinheitlich. Manche Autoren benutzen das Symbol "$\subseteq$" anstelle von "$\subset$", und dort entspricht "$\subset$" dann dem hier verwandten "$\subsetneq$".

Die *Potenzmenge* $P(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M, also

$$P(M) = \{N : N \subset M\}.$$

Zum Beispiel ist $P(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Für Mengen M und N heißen

$$M \cap N := \{x : x \in M \wedge x \in N\}$$

Durchschnitt und

$$M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\}$$

Vereinigung von M und N.

Die Mengen M und N heißen *disjunkt* falls $M \cap N = \emptyset$. Weiter ist $M \backslash N := \{x : x \in M \wedge x \notin N\}$, gesprochen "$M$ ohne N". Im Falle $N \subset M$ heißt $M \backslash N$ auch *Komplement* von N (in M).

Für $M = \{1, 2\}$ und $N = \{2, 3\}$ ist also $M \cap N = \{2\}$, $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ und $M \backslash N = \{1\}$.

Die folgenden Regeln für Mengen L, M, N sind analog zu den entsprechenden Regeln der Aussagenlogik:

(i) $M \cap N = N \cap M$

(ii) $M \cup N = N \cup M$

(iii) $(L \cap M) \cap N = L \cap (M \cap N)$

(iv) $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$

(v) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$

(vi) $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$

(vii) $M \backslash (M \backslash N) = M \cap N$

(viii) $L \backslash (M \cup N) = L \backslash M \cap L \backslash N$

(ix) $L \backslash (M \cap N) = L \backslash M \cup L \backslash N$.

Im Falle $N \subset M$ gilt mit (vii) also $M \backslash (M \backslash N) = N$. Man bezeichnet (i)-(vi) wieder als Kommutativ-, Assoziativ- bzw. Distributivgesetz. Die Gleichungen (viii) und (ix) heißen *Regeln von de Morgan*.

Wir führen hier nur den *Beweis* von (v):

$$\begin{aligned}
& x \in L \cap (M \cup N) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in L \wedge (x \in M \cup N) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in L \wedge (x \in M \vee x \in N) \\
\Leftrightarrow\quad & (x \in L \wedge x \in M) \vee (x \in L \wedge x \in N) \\
\Leftrightarrow\quad & (x \in L \cap M) \vee (x \in L \cap N) \\
\Leftrightarrow\quad & x \in (L \cap M) \cup (L \cap N)
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt. Die anderen Regeln beweist man analog.

Das *kartesische Produkt* $M \times N$ zweier Mengen M und N ist die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$, also

$$M \times N = \{(x, y) : x \in M \wedge y \in N\}.$$

Man beachte, dass $M \times N \neq N \times M$ für $M \neq N$ und $(x, y) \neq (y, x)$ für $x \neq y$.

Allgemeiner setzt man für $n \in \mathbb{N}$ und Mengen $M_1, M_2, ..., M_n$ auch

$$M_1 \times M_2 \times ... \times M_n := \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1 \in M_1 \wedge ... \wedge x_n \in M_n\}.$$

Im Falle $M_1 = M_2 = ... = M_n = M$ schreibt man statt

$$\underbrace{M \times M \times M ... \times M}_{n\text{-mal}}$$

auch M^n. So ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die Punkte des $\mathbb{R}^3$ entsprechen den Punkten des dreidimensionalen Raumes, die des $\mathbb{R}^2$ denen der Ebene.

Der hier verwandte "naive" Mengenbegriff führt zu Widersprüchen (Antinomien). Klassisches Beispiel ist die *Russellsche Antinomie*: Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, d.h.,

$$M = \{x : x \text{ Menge } \wedge x \notin x\}$$

Aus $M \notin M$ folgt dann $M \in M$, und umgekehrt. Es gilt also

$$M \in M \Leftrightarrow \neg(M \in M),$$

was ein Widerspruch ist. Der Widerspruch ist nur behebbar durch eine genauere Definition des Begriffs Menge - wir verzichten aber hier darauf.

Das obige Problem tritt nicht auf, falls – wie wir es tun werden – nur Teilmengen gewisser "unproblematischer" Grundmengen betrachtet werden.

1.3 Quantoren

In mathematischen Aussagen treten häufig Variable auf, etwa die Variable x in der durch "x ist Primzahl" gegebenen Aussage $A(x)$. Sinnvoll sind solche Aussagen im allgemeinen nur für Variable aus gewissen Mengen, im genannten Beispiel etwa $x \in M$ mit $M = \mathbb{N}$.

Mit Hilfe der Quantoren $\forall$ ("für alle") und $\exists$ ("es existiert") lassen sich aus einer für $x \in M$ erklärten Aussage $A(x)$ neue Aussagen bilden. Die Aussage

$$\forall x \in M : A(x),$$

bedeutet: "Für alle $x \in M$ gilt $A(x)$". Formal kann man die Aussage "$\forall x \in M : A(x)$" definieren, indem man sie als wahr definiert falls $M = \{x \in M : A(x)\}$, und als falsch sonst. Die Aussage

$$\exists x \in M : A(x)$$

bedeutet: "Es gibt ein $x \in M$ für welches $A(x)$ gilt". Dies gilt falls $\{x \in M : A(x)\} \neq \emptyset$. Ist etwa $M = \{a, b\}$, so gilt

$$(\forall x \in M : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) \wedge A(b)$$

und

$$(\exists x \in M : A(x)) \quad \Leftrightarrow \quad A(a) \vee A(b)$$

Analoges gilt für beliebige endliche Mengen M. Quantoren erlauben eine Verallgemeinerung auf unendliche Mengen M.

Regeln wie $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ verallgemeinern sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in M : A(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x), \\ \neg(\exists x \in M : A(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x). \end{aligned}$$

Der *Beweis* der ersten Äquivalenz folgt aus

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x \in M : A(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(M = \{x \in M : A(x)\}) \\ \Leftrightarrow\ & M \neq \{x \in M : A(x)\} \\ \Leftrightarrow\ & M \backslash \{x \in M : A(x)\} \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & \{x \in M : \neg A(x)\}) \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow\ & \exists x \in M : \neg A(x). \end{aligned}$$

Der Beweis der zweiten Äquivalenz ist analog.

Als Beispiel betrachten wir die (falsche) Aussage “Alle Primzahlen sind ungerade”. Ist $A(x)$ die (für ganze Zahlen erklärte) Aussage “x ist ungerade” und M die Menge der Primzahlen, so können wir die Aussage “Alle Primzahlen sind ungerade” in der Form “$\forall x \in M : A(x)$” schreiben. Die Negation davon ist die (wahre) Aussage “$\exists x \in M : \neg A(x)$”, die wir in Worten als “Es gibt eine Primzahl, die nicht ungerade ist” ausdrücken können. (Die Aussage ist wahr, da 2 eine gerade Primzahl ist.) Ein häufiger Fehler ist, als Negation der Aussage “$\forall x \in M : A(x)$” die Aussage “$\forall x \in M : \neg A(x)$” anzugeben (“Alle Primzahlen sind gerade.”).

Eine Aussage kann mehrere Quantoren enthalten. Bei verschiedenen Quantoren kommt es dabei auf die Reihenfolge an. Sei zum Beispiel S die Menge der deutschen Städte, M die Menge der Menschen und $A(x, y)$ die für $x \in S$ und $y \in M$ erklärte Aussage: y besitzt ein Haus in x. So ist die Aussage

$$\forall x \in S\, \exists y \in M : A(x, y),$$

d.h., “Zu jeder Stadt existiert ein Mensch, der dort ein Haus besitzt”, vermutlich richtig, während

$$\exists y \in M\, \forall x \in S : A(x, y),$$

d.h., “Es existiert ein Mensch, der in jeder deutschen Stadt ein Haus besitzt”, vermutlich falsch ist. Auf jeden Fall sind beide Aussagen verschieden. Die Negation der letzten Aussage lässt sich rein formal bilden:

$$\begin{aligned} & \neg(\exists y \in M\, \forall x \in S : A(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y \in M : \neg(\forall x \in S : A(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y \in M\, \exists x \in S : \neg A(x, y) \end{aligned}$$

Wir erhalten: “Zu jedem Mensch existiert eine Stadt, in der er kein Haus besitzt”. (Auch wenn sich Verneinungen oder andere Operationen mit Aussagen also auf rein formalem Wege bilden lassen, so ist es definitiv ratsam und in jedem Fall eine gute Übung, das Ergebnis “mit dem gesunden Menschenverstand” zu überprüfen.)

Quantoren erlauben auch, Vereinigung und Durchschnitt von unendlich vielen Mengen zu definieren. Für eine Menge S von Mengen setzen wir

$$\bigcap_{M \in S} M := \{x : (\forall M \in S : x \in M)\}$$

und

$$\bigcup_{M \in S} M := \{x : (\exists M \in S : x \in M)\}.$$

Die Regeln von de Morgan gelten dann entsprechend. Mit einer Menge N ist dann

$$N \backslash \bigcap_{M \in S} M = \bigcup_{M \in S} N \backslash M$$

und

$$N \backslash \bigcup_{M \in S} M = \bigcap_{M \in S} N \backslash M.$$

Neben den Quantoren $\forall$ und $\exists$ benutzen wir auch noch das Symbol “$\exists!$” für “es gibt genau ein”. Die Aussage “$\exists! x \in M : A(x)$” ist also definiert durch “$\{x \in M : A(x)\}$ besteht aus genau einem Element”.

Bemerkung zum Gebrauch von Quantoren. Benützt man die (übliche) Bezeichnung “$m|n$” für “m ist Teiler von n”, so kann man die Aussage

(A) Wenn eine natürliche Zahl durch 9 teilbar ist, so ist sie auch durch 3 teilbar

auch in der Form

(B) $\forall n \in \mathbb{N} : 9|n \Rightarrow 3|n$

schreiben. Der geübte Mathematiker[1] erkennt sofort, dass es sich hier um die gleiche Aussage handelt, die lediglich in zwei verschiedenen Formen ausgedrückt ist. In mathematischen Texten (Seminarausarbeitung, Bachelor- oder Masterarbeit, Buch,...) wird man im allgemeinen die Form (A) bevorzugen. Bei Vorträgen und Vorlesungen wird man aus Zeitgründen häufig die Form (B) wählen – die Quantoren werden also als abkürzende Schreibweise benutzt. Um mit der Schreibweise vertraut zu machen und um die Diskrepanz zwischen Tafelbild und Vorlesungsskript gering zu halten, wird in diesem Vorlesungsskript die Quantorenschreibweise häufiger benutzt als dies üblicherweise in einem mathematischen Text der Fall ist.

Um einem gerade bei Studienanfängern verbreiteten Irrglauben entgegenzuwirken, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die Schreibweise (B) nicht präziser (oder “mathematischer”) as (A) ist.

[1]Wer dies auch nach mehreren Monaten Mathematikstudium nicht sofort erkennt, hat nicht genug geübt.

1.4 Relationen und Funktionen

Seien M, N Mengen und $R \subset M \times N$. Dann heißt R *Relation* (zwischen M und N). Im Falle $M = N$ nennen wir R auch Relation auf M. Statt $(x, y) \in R$ schreiben wir im allgemeinen xRy. Anstelle von Buchstaben benutzen wir meistens suggestive Symbole wie $\sim, \simeq, <, \subset$, usw. zur Bezeichnung von Relationen.

Beispiel. $M = N = \mathbb{R}$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2\}$. Es gilt also $xRy \Leftrightarrow x^2 \geq y^2$, also $xRy \Leftrightarrow |x| \geq |y|$. Die durch R gegebene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ kann auch graphisch dargestellt werden (Abbildung 1).

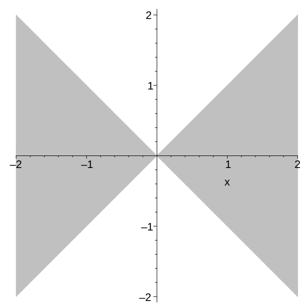

Abbildung 1: Graphische Darstellung der durch $x^2 \geq y^2$ gegebenen Relation.

Wir betrachten drei wichtige Spezialfälle.

(a) Äquivalenzrelationen. Sei M Menge, $\sim$ Relation auf M, also $\sim \subset M \times M$. Dann heißt $\sim$

- *reflexiv*, falls $\forall x \in M : x \sim x$,
- *symmetrisch*, falls $\forall x, y \in M : x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
- *transitiv*, falls $\forall x, y, z \in M : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Eine reflexive, symmetrische und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*.

Beispiel 1. Die Gleichheitsrelation ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel 2. Sei M die Menge der "Landpunkte" der Erdoberfläche (also die Menge der Punkte, die nicht im Meer oder anderen Gewässern liegen). Für $x, y \in M$ gelte $x \sim y$ falls x mit y auf dem Landweg verbunden werden kann. Dann ist $\sim$ Äquivalenzrelation.

Grundlegende Eigenschaft einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist, dass sie eine Zerlegung von M in disjunkte Teilmengen - die sogenannten Äquivalenzklassen - liefert, so dass für $x, y \in M$ genau dann $x \sim y$ gilt, wenn x, y in derselben Teilmenge liegen.

Für $x \in M$ sei dazu $[x] := \{y \in M : x \sim y\}$. Sei nun $x, y \in M$ mit $x \sim y$. Ist dann $z \in [y]$, also $y \sim z$, so ist nach Transitivität auch $x \sim z$, also $z \in [x]$. Es folgt $[y] \subset [x]$. Aus Symmetriegründen ist auch $[x] \subset [y]$, also $[x] = [y]$. Im Falle $x \not\sim y$ (was nach Definition $\neg(x \sim y)$ bedeuten soll) zeigt man $[x] \cap [y] = \emptyset$, woraus dann die Behauptung folgt.

Wir werden die Bezeichnung $[x]$ für die Äquivalenzklasse $\{y \in M : x \sim y\}$ auch im folgenden verwenden. Man beachte, dass $x \in [x]$, da Äquivalenzrelationen insbesondere symmetrisch sind.

Im obigen Beispiel 1 (Gleichheitsrelation) gilt $[x] = \{x\}$ für alle $x \in M$. Im Beispiel 2 nennt man die Äquivalenzklassen (je nach Größe) Erdteil oder Insel.

(b) Ordnungsrelationen. Eine Relation $\prec$ auf einer Menge M heißt *antisymmetrisch* (oder *identitiv*) falls für alle $x, y \in M$ aus $x \prec y$ und $y \prec x$ folgt, dass $x = y$ gilt, d. h., falls

$$\forall x, y \in M : x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y.$$

Eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation heißt *Halbordnung*.

Beispiel 1. $M = \mathbb{R}$, $\prec = \leq$

Beispiel 2. X Menge, $M = P(X)$, $\prec = \subset$.

Eine Relation $\prec$ auf M heißt *total* (oder *vollständig)*, falls für alle $x, y \in M$ mindestens eine der Aussagen $x \prec y$ und $y \prec x$ gilt, d. h., falls

$$\forall x, y \in M : x \prec y \vee y \prec x.$$

Eine totale Halbordnung heißt *Ordnung*. Das Paar $(M, \prec)$ heißt dann *geordnete Menge*.

Im obigem Beispiel 1 ist $\leq$ Ordnung, während $\subset$ in Beispiel 2 keine Ordnung ist, wenn M mindestens zwei Elemente hat. Denn sind $a, b \in M, a \neq b$, so ist $\{a\} \subset P(M)$ und $\{b\} \subset P(M)$, aber weder $\{a\} \subset \{b\}$ noch $\{b\} \subset \{a\}$.

Sei $\prec$ Halbordnung auf M und $A \subset M$. Dann heißt A *nach oben beschränkt*, falls $s \in M$ existiert, so dass $a \prec s$ für alle $a \in A$ gilt. Ein solches s heißt *obere Schranke* von A. Eine obere Schranke von A, die in A enthalten ist, heißt *Maximum* von A. Eine obere Schranke s von A heißt *Supremum* (oder kleinste obere Schranke) von A, wenn für jede obere Schranke t von A gilt, dass $s \prec t$.

Beispiel 1. $X = \{a, b, c\}$, $M = P(X)$, $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}$, $\prec = \subset$. Die Menge $\{a, b\}$ ist Supremum, aber kein Maximum von A.

Beispiel 2. $M = A = \mathbb{N}$, $\prec = \leq$. Hier besitzt A kein Supremum.

Satz 1.4.1 *Sei M Menge, $A \subset M$ und $\prec$ Halbordnung auf M.*

(i) *Ein Maximum von A ist auch Supremum von A.*

(ii) *A besitzt höchstens ein Supremum.*

Beweis. (i) Sei s Maximum von A, d.h., s ist obere Schranke von A und es gilt $s \in A$. Zu zeigen ist, dass s Supremum ist. Sei dazu t obere Schranke von A. Zu zeigen ist, dass $s \prec t$. Dies gilt aber wegen $s \in A$ nach Definition der oberen Schranke.

(ii) Seien r und s Suprema. Dann gelten sowohl $r \prec s$ wie auch $s \prec r$, also folgt $r = s$. $\square$

Hier und im folgenden wird durch das Symbol $\square$ das Ende eines Beweises markiert.

Aus Satz 1.4.1 folgt, dass eine Menge höchstens ein Maximum haben kann. Wir bezeichnen das Maximum (bzw. Supremum) einer Menge A mit $\max A$ (bzw. $\sup A$), falls es existiert.

Völlig analog definiert man nach unten beschränkt, untere Schranke, Infimum (größte untere Schranke), $\inf A$, Minimum, $\min A$. Satz 1.4.1 gilt entsprechend.

Eine geordnete Menge $(M \prec)$ heißt *ordnungsvollständig*, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von M ein Supremum besitzt.

Man kann zeigen, dass $(M, \prec)$ genau dann ordnungsvollständig ist, wenn jede nichtleere, nach unten beschränkte Teilmenge von M ein Infimum besitzt.

Ist $\prec$ Ordnung auf M, so heißt die durch

$$x \precneqq y :\Leftrightarrow x \prec y \wedge x \neq y$$

definierte Relation *strikte Ordnung* auf M. Für $x, y \in M$ gilt dann genau einer der drei Fälle $x \precneqq y$, $x = y$ oder $y \precneqq x$. Ist umgekehrt $\precneqq$ eine transitive Relation mit der letzten Eigenschaft, so ist $\precneqq$ strikte Ordnung, und die zugehörige Ordnung $\prec$ ist durch

$$x \prec y \Leftrightarrow x \precneqq y \vee x = y$$

gegeben.

Für $M = \mathbb{R}$, $\prec = \leq$ ist natürlich $\precneqq = <$. Statt $x < y$ bzw. $x \leq y$ schreiben wir auch $y > x$ bzw. $y \geq x$.

(c) Funktionen. Eine Relation f zwischen Mengen M und N heißt *Funktion* (oder *Abbildung*) von M nach N (oder in N) falls zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit xfy existiert, d.h., falls

$$\forall x \in M \exists! y \in N : (x, y) \in f.$$

Wir bezeichnen das zu $x \in N$ existierende, eindeutig bestimmte y, welches xfy erfüllt, mit $f(x)$ und nennen es *Bild von* x (unter f) oder *Wert* von f an der Stelle x. Man muss zwischen der Funktion f (Teilmenge von $M \times N$) und dem Wert $f(x)$ (Element von N) unterscheiden.

Obwohl eine Funktion f von M nach N also formal nichts anderes als eine Teilmenge von $M \times N$ mit gewissen Eigenschaften ist, ist es oft hilfreich, sich f als Vorschrift vorzustellen, die jedem Wert $x \in M$ sein Bild $y \in N$ zuordnet. Dieser Gedanke kommt auch in den Schreibweisen

$$f : M \to N,\ f(x) = ...$$

und

$$f : M \to N,\ x \mapsto ...,$$

die wir für Funktionen benutzen, zum Ausdruck.

Man kann den obigen Gedanken, sich f als Vorschrift vorzustellen, auch zur Definition des Funktionsbegriffes verwenden. In diesem Falle würde man $\{(x, f(x)) : x \in M\}$ als Graph der Funktion f bezeichnen. Wir haben hier die Funktion f über ihren Graphen definiert, d.h., es gilt $f = \{(x, f(x)) : x \in M\}$.

Man sollte die Vorstellung, dass eine Funktion $f : M \to N$ eine Vorschrift ist, die jedem $x \in M$ ein $y \in N$ zuordnet, aber nicht so interpretieren, dass dieses y auch immer effektiv berechnet werden kann. Beispielsweise ist bei der Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto \text{ größte Primzahl, die } x \text{ teilt}$$

der Wert $f(x)$ für große x (mit mehreren hundert Stellen) kaum zu berechnen.

Für eine Funktion $f : M \to N$ nennen wir M *Definitionsbereich* und N *Zielbereich*. Man beachte, dass M durch f eindeutig festgelegt ist, denn $M = \{x : \exists y : (x, y) \in f)\}$. Der Zielbereich ist durch die Funktion f (also durch die Menge f) aber nicht eindeutig festgelegt. Zum Beispiel kann er durch jede Obermenge ersetzt werden, d.h., ist f Funktion von M nach N und ist $N' \supset N$, so ist f auch Funktion von M nach N'.

Sei f Funktion von M nach N, $A \subset M$ und $B \subset N$. Dann heißt

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von A (unter f) und

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\}$$

Urbild von B (unter f). Das Bild von M, also die Menge $f(M)$, heißt *Wertebereich* (von f). Man beachte, dass die Bezeichnungen hier uneinheitlich sind: in manchen Büchern wird auch N als Wertebereich bezeichnet. Für $y \in N$ schreibt man statt $f^{-1}(\{y\})$ auch $f^{-1}(y)$.

Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *injektiv* (oder *eineindeutig*) falls für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ auch $f(x) \neq f(y)$ gilt, d. h., falls

$$\forall x, y \in M : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

(Äquivalent zu obiger Implikation ist natürlich ihre Kontraposition: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$). Eine Funktion $f : M \to N$ heißt *surjektiv* (oder Funktion von M *auf* N) falls $f(M) = N$, d.h., falls gilt:

$$\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y.$$

Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Ist $f : M \to N$ bijektiv, so gilt

$$\forall y \in N \exists! x \in M : f(x) = y.$$

Man beachte, dass Surjektivität und damit Bijektivität keine Eigenschaft der Funktion (also Menge) selbst ist, sondern die Angabe eines Zielbereiches erfordert. Bei Injektivität ist dies nicht der Fall.

Beispiel 1. Die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv. Denn wegen $f(-1) = f(1)$ ist sie nicht injektiv, und wegen $f^{-1}(2) = \emptyset$ ist sie nicht surjektiv.

Beispiel 2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^3$, ist injektiv aber nicht surjektiv.

Beispiel 3. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto$ größte natürliche Zahl, die nicht größer als $\sqrt{x}$ ist. Dann ist f surjektiv, da für jedes $y \in \mathbb{N}$ zum Beispiel $f(y^2) = y$ gilt. Die Funktion f ist aber nicht injektiv, da zum Beispiel $f(1) = f(2)$.

Man bezeichnet zu einer reellen Zahl x die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist, auch mit $[x]$. Durch $x \mapsto [x]$ wird damit eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Z}$ definiert. Man nennt $[x]$ auch Gaußklammer von x. Die Funktion f aus Beispiel 3 kann damit als $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = [\sqrt{x}]$, geschrieben werden.

Ist $f : M \to N$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in N$ genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Damit existiert eine Funktion von N nach M, die jedem $y \in N$ dieses $x \in M$ zuordnet. Sie heißt *Umkehrfunktion* (oder *inverse Funktion*) von f und wird mit f^{-1} bezeichnet. Formal gilt einfach $f^{-1} = \{(f(x), x) : x \in M\} \subset N \times M$.

Seien $f : M \to N$ und $g : P \to Q$ Funktionen mit $f(M) \subset P$. Dann ist die *Komposition* (oder *Zusammensetzung*) $g \circ f$ definiert durch

$$g \circ f : M \to Q, x \mapsto g(f(x)).$$

Sei $id_M : M \to M, x \mapsto x$ die *Identität* (oder *identische Abbildung*) einer Menge M. Ist dann $f : M \to N$ bijektiv, so ist $f^{-1} \circ f = id_M$ und $f \circ f^{-1} = id_N$.

Satz 1.4.2 *Sei $f : M \to N$ Funktion. Dann gilt:*

(i) *f ist injektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert $g : N \to M$ mit $g \circ f = id_M$.*

(ii) *f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ Es existiert $h : N \to M$ mit $f \circ h = id_N$.*

Der Beweis sei als Übung überlassen. Funktionen g, h wie in (i),(ii) nennt man auch Links- bzw. Rechtsinverse.

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\backslash\{1\}, x \mapsto x+1$, ist bijektiv und $f^{-1} : \mathbb{N}\backslash\{1\} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x - 1$.

Sei $f : M \to N$ Funktion, $L \subset M$. Die Funktion $g : L \to N, x \mapsto f(x)$, heißt *Einschränkung* (oder *Restriktion*) von f auf L und wird mit $f|L$ bezeichnet. Ist g Einschränkung von f, so nennt man f auch Fortsetzung von g. Die Fortsetzung einer Funktion ist natürlich nicht eindeutig.

Es sei $f : M \to N$ Funktion und es sei auf N eine Ordnung gegeben. Dann heißt f *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, falls $f(M)$ nach oben (bzw. unten) beschränkte Teilmenge von N ist. Eine nach oben und unten beschränkte Funktion heißt beschränkt.

Sei nun zusätzlich auch auf M eine Ordnung gegeben. Wir bezeichnen die Ordnung auf M mit $\prec_M$ und die auf N mit $\prec_N$. Dann heißt f *monoton steigend*, falls

$$\forall x, y \in M : x \prec_M y \Rightarrow f(x) \prec_N f(y)$$

und *monoton fallend*, falls

$$\forall x, y \in M : x \prec_M y \Rightarrow f(y) \prec_N f(x).$$

Eine monoton steigende bzw. fallende Funktion, die injektiv ist, heißt *streng monoton* steigend bzw. fallend. Im streng monoton steigenden Fall etwa gilt dann

$$\forall x, y \in M : x \precneqq_M y \Rightarrow f(x) \precneqq_N f(y)$$

Beispiel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist weder monoton fallend noch monoton steigend. Es ist aber $f|\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ streng monoton steigend und $f|\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ streng monoton fallend.

1.5 Vollständige Induktion

Wir setzen die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ als gegeben voraus. Wichtiges Beweismittel bei Aussagen über natürliche Zahlen ist das

Beweisprinzip der vollständigen Induktion. *Es sei für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Gilt dann*

(i) *$A(1)$ ist wahr*

und

(ii) *für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Wahrheit von $A(n+1)$ aus der von $A(n)$,*

so ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Man nennt dabei (i) den Induktionsanfang und (ii) den Induktionsschluss (oder Induktionsschritt). Im Induktionsschluss nennt man auch $A(n)$ Induktionsvoraussetzung und $A(n+1)$ Induktionsbehauptung. Formal ausgedrückt lautet das Prinzip der vollständigen Induktion wie folgt:

$$[A(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n).$$

Beispiel. Man zeige, dass $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei dazu $A(n)$ die (für natürliche Zahlen n) erklärte Aussage

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(i) $A(1)$ ist wahr, denn $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$. Zu zeigen ist, dass $A(n+1)$ gilt, d.h.

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dies gilt aber wegen

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) &= (1 + 2 + 3 + ... + n) + n + 1 \\ &\overset{A(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

Wir haben oben die Stelle, an der die Induktionsvoraussetzung $A(n)$ benutzt wurde, mit einem entsprechenden Vermerk über dem Gleichheitszeichen markiert. Dies ist in mathematischen Texten eher unüblich, wird aber als Kurzschreibweise in Vorlesungen (oder Vorträgen) verwendet.

Ausdrücke der Form $f(m)+f(m+1)+...+f(n)$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$, schreiben wir im folgenden kurz als $\sum_{k=m}^{n} f(k)$. Die oben bewiesene Formel lautet dann

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Eine analoge Schreibweise gilt für Produkte:

$$\prod_{k=m}^{n} f(k) := f(m) \cdot f(m+1) \cdot ... \cdot f(n).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n! := \prod_{k=1}^{n} k$, gesprochen n Fakultät. Wir setzen außerdem $0! := 1$. Für $k, n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k \leq n$, definieren wir die *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

gesprochen n über k.

Beispiel. Man zeige, dass $\binom{2n}{n} \geq 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Induktionsanfang. Wegen $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2 = 2^1$ gilt die Ungleichung für $n = 1$.

Induktionsschritt. Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\binom{2n}{n} \geq 2^n$. Zu zeigen ist, dass

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \geq 2^{n+1}.$$

Dies folgt aber wegen

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \\
&\overset{\text{Ind.-Vor.}}{\geq} \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot 2^n \\
&= \frac{2n+1}{n+1} \cdot 2^{n+1} \\
&\geq 2^{n+1}. \quad \square
\end{aligned}$$

Will man für gegebenes $N \in \mathbb{Z}$ Aussagen über $\{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\}$ beweisen, kann man dies durch geeignete Modifikation des obigen Prinzips tun (Induktionsanfang für $n = N$). Es ist auch möglich, im Induktionsschritt nicht nur die Gültigkeit von $A(n)$, sondern die von $A(k)$ für alle $k \leq n$ vorauszusetzen.

1.6 Körper

Wir formalisieren jetzt Addition und Multiplikation sowie ihre Eigenschaften.

Definition 1.6.1 Sei K Menge und seien $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \to K$ Funktionen (wobei wir aber im folgenden $x + y$ statt $+((x, y))$ und $x \cdot y$ oder xy statt $\cdot((x, y))$ schreiben). Das Tripel $(K, +, \cdot)$ heißt *Körper* (englisch: field), falls die folgenden neun Eigenschaften gelten:

(A1) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$

(A2) $\forall x, y, z \in K : (x + y) + z = x + (y + z)$

(A3) $\exists 0 \in K \forall x \in K : x + 0 = x$

(A4) $\forall x \in K \exists y \in K : x + y = 0$

(M1) $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$

(M2) $\forall x, y, z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(M3) $\exists 1 \in K \setminus \{0\} \forall x \in K \setminus \{0\} : x \cdot 1 = x$

(M4) $\forall x \in K \setminus \{0\} \exists y \in K \setminus \{0\} : x \cdot y = 1$

(D) $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Beispiele sind $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sowie (Menge der rationalen Funktionen, $+, \cdot$). (Eine rationale Funktion ist ein Quotient von Polynomen.) Statt "$(K, +, \cdot)$ ist Körper" sagt man oft auch "K ist Körper".

Man nennt (A1)-(A4) Axiome der Addition, (M1)-(M4) Axiome der Multiplikation und (D) Distributivgesetz. (A1) und (M1) heißen Kommutativgesetze und (A2) und (M2) heißen Assoziativgesetze. Insgesamt nennt man die obigen Regeln die Körperaxiome.

Wir ziehen einige Folgerungen aus den Körperaxiomen.

Satz 1.6.1 *Die mit* 0 *und* 1 *bezeichneten Elemente sind eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien 0 und $0'$ Elemente von K mit der in (A3) geforderten Eigenschaft, d.h., $\forall x \in K : x + 0 = x$ und $\forall x \in K : x + 0' = x$. Zu zeigen ist $0 = 0'$.

Wählt man oben $x = 0'$ bzw. $x = 0$, so erhält man $0' + 0 = 0'$ bzw. $0 + 0' = 0$. Mit (A1) folgt also $0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$. Analog zeigt man die Eindeutigkeit der 1. $\square$

Man beachte, dass zum Beweis der Eindeutigkeit der 0 lediglich (A1) und (A3) verwandt wurden. Genaugenommen sollte man diesen Beweis erst führen, bevor man (A4) formuliert. Entsprechendes gilt für (M4).

Satz 1.6.2 *Die in* (A4) *und* (M4) *genannten Elemente y sind eindeutig.*

Beweis. Wir beschränken uns auf (A4). Der Beweis für (M4) ist analog.

Seien $y, y' \in K$ mit $x+y=0$ und $x+y'=0$. Es folgt $x+y=x+y'$ und damit $y+(x+y)=y+(x+y')$. Mit (A2) folgt $(y+x)+y=(y+x)+y'$. Wegen (A1) ist aber $y+x=x+y$, also $y+x=0$. Wir erhalten $0+y=0+y'$ und damit $y=y'$. □

Wir bezeichnen für $x \in K$ das (nach Satz 1.6.2) eindeutig bestimmte y mit $x+y=0$ mit $-x$. Analog wird für $x \in K\backslash\{0\}$ das eindeutig bestimmte y mit $x \cdot y = 1$ mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ bezeichnet. Weiter schreiben wir auch $a-b$ statt $a+(-b)$ und $\frac{a}{b}$ oder a/b statt $a \cdot \frac{1}{b}$.

Sind $a, b \in K$, so existiert ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $a+x=b$, nämlich $x=b-a$. Analog existiert zu $a, b \in K\backslash\{0\}$ ein eindeutig bestimmtes $x \in K$ mit $ax=b$, nämlich $x=\frac{b}{a}$. Auf den einfachen Beweis dieser Tatsachen verzichten wir.

Satz 1.6.3 *Sei K Körper, $x, y \in K$. Dann gilt: $xy=0 \Leftrightarrow x=0 \vee y=0$.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Wegen $xy=yx$ kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) annehmen, dass $y=0$ gilt. Zu zeigen ist $x \cdot 0 = 0$.

Nun ist $0+0=0$ nach (A3), nach (D) also $x0+x0=x(0+0)=x0$. Andererseits ist nach (A3) auch $x0+0=x0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen von $a+x=b$ folgt $x0=0$.

"$\Rightarrow$": Sei $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0$. Zu zeigen ist, dass $y=0$. (Wir haben eine Aussage der Form $A \Rightarrow (B \vee C)$ zu zeigen, und wir haben benutzt, dass diese äquivalent zu $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ ist.) Nun ist $y = y \cdot 1 = y(xx^{-1}) = (yx)x^{-1} = (xy)x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$. □

Wir geben einige weitere Rechenregeln, die leicht aus den Körperaxiomen gefolgert werden können, ohne Beweis an:

(i) $\forall x \in K : -(-x) = x$

(ii) $\forall x \in K\backslash\{0\} : (x^{-1})^{-1} = x$

(iii) $\forall x, y \in K : -(x+y) = (-x)+(-y)$

(iv) $\forall x, y \in K\backslash\{0\} : (xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

(v) $\forall x, y \in K : (-x)y = -(xy) = x(-y)$

Auch einige Rechenregeln, die hier nicht explizit aufgeführt sind, werden im weiteren benutzt werden.

Es sei eine Menge K mit einer "Verknüpfung" $+$ gegeben. Gelten dann (A1)-(A4), so heißt das Paar $(K,+)$ *kommutative Gruppe* (oder *abelsche Gruppe*).

Ist $(K,+,\cdot)$ Körper, so ist also $(K,+)$ kommutative Gruppe. Aus (M1)-(M4) folgt, dass auch $(K\backslash\{0\},\cdot)$ kommutative Gruppe ist. Ist umgekehrt $(K\backslash\{0\},\cdot)$ kommutative Gruppe, so folgen hieraus nicht unmittelbar (M1) und (M2), da dort ja auch $x=0$, $y=0$ oder $z=0$ zugelassen ist. Setzt man aber voraus, dass $(K,+)$ und $(K\backslash\{0\},\cdot)$ kommutative Gruppen sind und dass (D) gilt, so folgt wie im Beweis von Satz 1.6.1, dass (M1) und (M2) auch dann gelten, wenn ein Faktor 0 ist. Damit erhält man, dass $(K,+,\cdot)$ genau dann ein Körper ist, wenn $(K,+)$ und $(K\backslash\{0\},\cdot)$ kommutative Gruppen sind und (D) gilt. Dies macht die Körperaxiome einprägsamer. Körper und (kommutative) Gruppen sind Beispiele für algebraische Strukturen. Eine genauere Untersuchung dieser und anderer Strukturen wie Ring, Halbgruppe, Schiefkörper, Vektorraum, usw. findet in der (linearen) Algebra statt.

Wir notieren hier noch, dass $(K,+,\cdot)$ *Integritätsbereich* heißt, falls alle Körperaxiome bis auf (M4) gelten und außerdem noch

$$\forall x, y \in K : xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

gilt. Die letzte Eigenschaft nennt man *Nullteilerfreiheit*. Für Körper wurde sie mit Hilfe von (M4) in Satz 1.6.1 gezeigt. Beispiel eines Integritätsbereichs ist $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

Exkurs: Konstruktion der rationalen Zahlen. Wir skizzieren, wie man den Integritätsbereich $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ zu einem Körper erweitern kann. Dazu betrachten wir die auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ durch $(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow ad = bc$ definierte Relation $\sim$. Die Idee dabei ist, (a,b) mit dem Bruch $\frac{a}{b}$ zu identifizieren.

Zunächst zeigen wir, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist. Um etwa die Transitivität zu zeigen, sei $(a,b) \sim (c,d)$ und $(c,d) \sim (e,f)$. Es ist dann $ad = bc$ und $cf = de$. Zu zeigen ist $(a,b) \sim (e,f)$, also $af = be$. Nun ist aber $(af-be)d = afd - bed = (ad)f - (de)b = (bc)f - (cf)b = 0$. Wegen $d \neq 0$ und Nullteilerfreiheit folgt $af = be$.

Als nächstes definiert man auf der Menge der Äquivalenzklassen $[(a,b)]$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+bc, bd)]$$

und

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(a \cdot c, b \cdot d)].$$

Zunächst muss man jetzt zeigen, dass diese Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen *wohldefiniert* ist, d.h., nicht von den Repräsentanten der Äquivalenzklassen abhängt.

Sei dazu $(a,b) \sim (a',b')$ und $(c,d) \sim (c',d')$, d. h., $ab' = ba'$ und $cd' = dc'$. Dann ist

$$\begin{aligned} (ad+bc)b'd' &= adb'd + bcb'd' \\ &= ab'dd' + cd'bb' \\ &= ba'dd' + dc'bb' \\ &= bd(a'd' + b'c') \end{aligned}$$

also $(ad+bc, bd) \sim (a'd'+b'c', b'd')$. Analog (aber einfacher) zeigt man die Wohldefiniertheit der Multiplikation von Äquivalenzklassen.

Schließlich zeigt man, dass die Menge der Äquivalenzklassen mit der so definierten Addition und Multiplikation einen Körper bildet, d.h., $(\{[(a,b)] : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}, +, \cdot)$ ist Körper.

Beispielsweise folgt (A1) da $[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad+bc, bd)] = [(cb+da, db)] = [(c,d)] + [(a,b)]$. Die anderen Körperaxiome sind ebenfalls leicht nachzurechnen.

Dabei ist $[(0,1)]$ das Nullelement und $[(1,1)]$ das Einselement, $-[(a,b)] = [(-a,b)]$ und $[(a,b)]^{-1} = [(b,a)]$. Wie bezeichnen den erhaltenen Körper mit $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ und nennen ihn Körper der rationalen Zahlen.

Man kann eine ganze Zahl n mit der Äquivalenzklasse $[(n,1)]$ identifizieren. Denn es gilt $[(n,a)] + [(m,1)] = [(n+m,1)]$ und $[(n,1)] \cdot [(m,1)] = [(n \cdot m,1)]$ für $m,n \in \mathbb{Z}$. In diesem Sinne ist $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ enthalten.

Für eine formale Beschreibung dieses Sachverhalts betrachtet man die Funktion $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto [(n,1)]$. Dann gilt $i(n+m) = i(n)+i(m)$ und $i(n\cdot m) = i(n)\cdot i(m)$. Außerdem ist i injektiv.

Bemerkungen. 1. Mit dem oben angegebenen Verfahren kann man jeden Integritätsbereich zu einem Körper erweitern, dem sogenannten *Quotientenkörper*. Ein weiteres Beispiel ist etwa durch den Integritätsbereich der Polynome gegeben, der zum Körper der rationalen Funktionen erweitert werden kann.

2. Auf ähnliche Weise kann man $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$ konstruieren. Später werden wir $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruieren. Insgesamt wird so $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ aus $\mathbb{N}$ konstruiert. Zuvor geben wir aber eine axiomatische Beschreibung von $\mathbb{R}$.

Definition 1.6.2 Sei $(K,+,\cdot)$ Körper und sei $\leq$ Ordnung auf K, d.h., $(K,\leq)$ ist geordnete Menge. Dann heißt $(K,+,\cdot,\leq)$ *angeordneter Körper*, falls gilt:

(O1) $\forall x,y,z \in K : x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$,

(O2) $\forall x,y \in K : 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

Man nennt (O1) und (O2) die *Ordnungsaxiome*.

Beispiele angeordneter Körper sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. (Wir schreiben statt $(K,+,\cdot,\leq)$ oft wieder nur K.)

Sei K angeordneter Körper. Wir schreiben wieder $x < y$ oder $y > x$ statt $(x \leq y \wedge x \neq y)$ und auch $y \geq x$ statt $x \leq y$. Wir nennen $x \in K$ *positiv* falls $x > 0$ und *negativ* falls $x < 0$.

Aus den Körper- und Ordnungsaxiomen (und den Eigenschaften der Ordnung) erhält man die folgenden Regeln. Dabei sind $x,y,u,v,a \in K$.

(i) $x \leq y \Leftrightarrow x-y \leq 0 \Leftrightarrow y-x \geq 0$,

(ii) $x \leq y \wedge u \leq v \Rightarrow x+u \leq y+v$,

(iii) $a \geq 0 \wedge x \leq y \Rightarrow ax \leq ay$,

(iv) $x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0$,

(v) $xy > 0 \Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$,

(vi) $x^2 \geq 0$,

(vii) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$,

(viii) $1 > 0$,

(ix) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$,

(x) $x > y > 0 \Rightarrow (y^{-1} > x^{-1}) \wedge (xy^{-1} > 1)$.

Dabei ist in (vi) natürlich $x^2 := x \cdot x$. Allgemeiner ist

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-mal}}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis von (i) braucht man nur (O1) mit $z = -y$ bzw. $z = -x$ verwenden. Regel (ii) folgt durch zweimalige Anwendung von (O1) und (A1):

$$x+u \leq y+u = u+y \leq v+y = y+v.$$

Um (iii) zu zeigen, beachten wir zunächst, dass $y-x \geq 0$ nach (i). Mit (O2) folgt $a(y-x) \geq 0$, also $ay - ax \geq 0$ wegen (D). Mit (i) folgt schließlich $ax \leq ay$.

Wir verzichten auf die (einfachen) Beweise von (iv)-(x). Es gibt auch noch viele weitere Rechenregeln, die wir gelegentlich benutzen werden, aber hier nicht ausdrücklich aufführen.

Wir definieren für $x \in K$

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

und nennen $|x|$ den *Betrag* von x. Für $x,y \in K$ gelten dann die folgenden Rechenregeln:

(i) $|x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $|x| \geq x$

(iv) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(v) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(vi) $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Regel (v) heißt *Dreiecksungleichung*. Zu ihrem Beweis beachte man, dass $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ nach (iii). Es folgt $x+y \leq |x|+|y|$. Weiter ist $-x \leq |-x| = |(-1)\cdot x| = |-1| \cdot |x| = -(-1)\cdot|x| = 1 \cdot |x| = |x|$ und analog $-y \leq |y|$. Wir erhalten $-(x+y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|$. Insgesamt folgt $x+y \leq |x|+|y|$ und $-(x+y) \leq |x|+|y|$. Hieraus folgt die Behauptung. (Wir haben (iii) im Beweis von (v) benutzt. Natürlich muss man sich noch überzeugen, dass (iii) ohne Zuhilfenahme von (v) bewiesen werden kann, aber dies ist leicht zu sehen.)

Definition 1.6.3 Ein angeordneter Körper $(K,+,\cdot,\leq)$ heißt *vollständig*, falls die geordnete Menge $(K,\leq)$ ordnungsvollständig ist.

In einem vollständigen angeordneten Körper besitzt also jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum. Das Supremum lässt sich in Körpern auch wie folgt charakterisieren.

Satz 1.6.4 *Sei $(K,+,\cdot,\leq)$ angeordneter Körper und A nach oben beschränkte Teilmenge von K. Sei s eine obere Schranke A. Dann ist s Supremum von A genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in A$ existiert, so dass $s-\varepsilon < x$, d.h.*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A : s - \varepsilon < x.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Wir führen den Beweis indirekt (genauer: durch Kontraposition) und nehmen an, dass $(*)$ nicht gilt. Es folgt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in A : s - \varepsilon \geq x,$$

d.h.

$$\exists \varepsilon > 0 : s - \varepsilon \text{ ist obere Schranke von } A.$$

Da aber $s - \varepsilon < s$ falls $\varepsilon > 0$, ist s also kein Supremum von A.

"$\Leftarrow$": Es gelte $(*)$ und es sei s' obere Schranke von A. Zu zeigen ist, dass $s' \geq s$. Wir nehmen an, dass dies nicht gilt. Dann ist $s' < s$ und damit $\varepsilon := s - s' > 0$. Nach $(*)$ existiert $x \in A$ mit $x > s - \varepsilon = s'$. Dies ist ein Widerspruch, da s' obere Schranke von A.

1.7 Reelle Zahlen

Grundlegend für die Analysis ist das folgende Resultat.

Satz 1.7.1 *Es gibt einen vollständigen angeordneten Körper.*

Wir werden später einen Beweis dieses Satzes skizzieren, indem wir andeuten werden, wie man den angeordneten Körper der rationalen Zahlen "vervollständigen" kann. Den so erhaltenen vollständigen angeordneten Körper nennen wir den *Körper der reellen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$, kurz auch $\mathbb{R}$.

Darüberhinaus kann man sogar zeigen, dass die reellen Zahlen im wesentlichen der einzige vollständige angeordnete Körper sind: ist $(K,+_K,\cdot_K,\leq_K)$ ein vollständiger angeordneter Körper, so existiert eine bijektive Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ mit $f(x +_K y) = f(x) + f(y)$, $f(x \cdot_K y) = f(x) \cdot f(y)$ und $x \leq_K y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in K$. Wir verzichten hier auf einen Beweis dieser Tatsache. Stattdessen entwickeln wir die Theorie des vollständige angeordneten Körpers $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ anhand der in §1.6 gegebenen Körper- und Ordnungsaxiome sowie der Vollständigkeit. Dabei betrachten wir $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}}, \qquad \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}.$$

Satz 1.7.2 *$\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt (in $\mathbb{R}$).*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt ist. Sei $s = \sup \mathbb{N}$. Dann gilt $n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 1.6.4 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $N > s - 1$. Es folgt $N + 1 > s$. Dies ist ein Widerspruch, da $N + 1 \in \mathbb{N}$. $\square$

Folgerung 1.7.1 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $na > b$.*

Beweis. Andernfalls gilt $na \leq b$ und damit $n \leq b/a$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu Satz 1.7.2. $\square$

Folgerung 1.7.2 *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < a$.*

Beweis. Man wende Folgerung 1.7.1 mit $b = 1$ an. $\square$

Satz 1.7.2 und die beiden Folgerungen daraus heißen *Satz des Archimedes* oder *Satz des Eudoxos*; die Bezeichnungen sind hier uneinheitlich.

Satz 1.7.3 *Es sei $M \subset \mathbb{Z}$, $M \neq \emptyset$. Weiter sei M nach oben (bzw. unten) beschränkt. Dann hat M ein Maximum (bzw. Minimum).*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass M nach unten beschränkt ist. Der andere Fall ist analog. Weiter kann man annehmen, dass $M \subset \mathbb{N}$ gilt, dass also 1 untere Schranke von M ist. (Denn ist $M \subset \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}$ untere Schranke, so betrachten wir $M' := \{n - s + 1 : n \in M\}$. Dann ist $M' \subset \mathbb{N}$ und ist μ Minimum von M', so ist $\mu + s - 1$ Minimum von M.)

Wir betrachten die Menge A aller natürlichen Zahlen, die untere Schranke von M sind, also $A = \{n \in \mathbb{N} : (\forall m \in M : n \leq m)\}$. Dann ist $1 \in A$ wegen $M \subset \mathbb{N}$. Andererseits ist A nach oben beschränkt, da jedes Element von M obere Schranke von A ist. Nach Satz 1.7.2 gilt damit $A \neq \mathbb{N}$.

Damit existiert aber $k \in \mathbb{N}$, so dass $k \in A$ und $k+1 \notin A$. Denn andernfalls würde für alle $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $k \in A$ die Aussage $k + 1 \in A$ implizieren, aufgrund des Beweisprinzips der vollständigen Induktion also $A = \mathbb{N}$ gelten. Formal sieht dieser Schluss wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
& \neg(\exists k \in \mathbb{N} : k \in A \wedge k + 1 \notin A) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall k \in \mathbb{N} : \neg(k \in A \wedge k + 1 \notin A) \\
\Leftrightarrow \quad & \forall k \in \mathbb{N} : k \notin A \vee k + 1 \in A \\
\Leftrightarrow \quad & \forall k \in \mathbb{N} : k \in A \Rightarrow k + 1 \in A \\
\overset{1 \in A}{\Rightarrow} \quad & A = \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Sei nun also $k \in A$ mit $k+1 \notin A$. Dann ist k untere Schranke von M wegen $k \in A$. Wegen $k + 1 \notin A$ existiert $m \in M$ mit $m < k + 1$. Da aber auch $k \leq M$ gilt, und zwischen k und $k + 1$ keine natürliche Zahl liegt, folgt $k = m$, also $k \in M$. Damit ist k Minimum von M. $\square$

Wir haben im Beweis die Behauptung auf die folgende Aussage reduziert: *jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.* Hierzu sagt man auch: $\mathbb{N}$ ist *wohlgeordnet*.

Den folgenden Satz drückt man auch mit den Worten "$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$" aus.

Satz 1.7.4 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann existiert $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$.*

Beweis. Es ist $b - a > 0$ und damit existiert nach Folgerung 1.7.2 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b - a$. Wir betrachten die Menge $M := \{k \in \mathbb{Z} : k > na\}$. Nach Satz 1.7.2 gilt dann $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M nach unten (durch na) beschränkt. Nach Satz 1.7.3 hat M also ein Minimum m. Es gilt dann $m > na$ und damit $a < \frac{m}{n}$. Außerdem ist

$m-1 \leq na$ und damit $m \leq na+1$, also $\frac{m}{n} \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b$. Also leistet $r := \frac{m}{n}$ das Verlangte. $\square$

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dann heißen

- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *offenes Intervall*,
- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall*,
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ und $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ *halboffene Intervalle*.

Im Falle eines abgeschlossenen Intervalls lassen wir auch $a = b$ zu: $[a,a] := a$. Bei Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ setzen wir formal $b = \infty$ und bezeichnen auch sie als offenes Intervall, also $(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Analog definiert man das offene Intervall $(-\infty, b)$ sowie die abgeschlossenen Intervalle $[a,\infty)$ und $(-\infty, b]$. Wir bezeichnen $(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$ sowohl als offenes Intervall wie auch als abgeschlossenes Intervall. Weiter setzen wir noch $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$.

Man beachte, dass wir für offene Intervalle und geordnete Paare die gleiche Notation verwenden! Dies sollte aber nicht zu Missverständnissen führen. Eine andere übliche Notation für das offene Intervall (a,b) ist $]a,b[$, mit einer analogen Notation für halboffene Intervalle.

In der jetzt eingeführten Terminologie lautet Satz 1.7.4 etwa: Ist I offenes Intervall, so gilt $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Satz 1.7.5 *$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.*

Beweis. Sei $M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ (etwa $0 \in M$) und M ist nach oben beschränkt (etwa durch 2). Wir nehmen an, dass $\mathbb{Q}$ vollständig ist. Dann besitzt M ein Supremum $s \in \mathbb{Q}$. Wegen $0 \in M$ gilt $s \geq 0$.

Wir zeigen zunächst, dass $s^2 = 2$ gilt. Dazu nehmen wir an, dass $s^2 < 2$. Dann ist $m := \min\{\frac{2-s^2}{2s+1}, 1\} > 0$ und nach Satz 1.7.4 existiert $r \in (s, s+m) \cap \mathbb{Q}$. Es folgt

$$r^2 < (s+m)^2 = s^2 + 2sm + m^2 \leq s^2 + 2sm + m \leq s^2 + 2s\frac{2-s^2}{2s+1} + \frac{2-s^2}{2s+1} = 2,$$

also $r \in M$ und $s < r$, im Widerspruch zu $s = \sup M$. Ähnlich führt man $s^2 > 2$ zum Widerspruch. Es gilt also $s^2 = 2$.

Wegen $s \in \mathbb{Q}$ existieren $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, mit $s = \frac{p}{q}$. Man kann annehmen, dass p und q teilerfremd sind, insbesondere also, dass p und q nicht beide gerade sind. Wegen $2 = s^2 = \frac{p^2}{q^2}$ gilt $p^2 = 2q^2$. Dies impliziert, dass p^2 gerade ist. Damit ist aber auch p gerade, etwa $p = 2n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Es folgt, dass $2q^2 = p^2 = (2n)^2 = 4n^2$, also $q^2 = 2n^2$. Dies impliziert aber, dass q^2 und damit q gerade ist. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung. Die Menge M aus dem obigen Beweis besitzt wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ein Supremum $s \in \mathbb{R}$, und das obige Argument zeigt, dass $s^2 = 2$ gilt. Wir bezeichnen diese reelle Zahl s natürlich mit $\sqrt{2}$.

Diese Idee benutzt man allgemeiner zur Definition rationaler Potenzen.

Definition 1.7.1 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}_+$. Man setzt

$$\sqrt[n]{a} := \sup\{x \in \mathbb{R} : x^n \leq a\}, \quad a^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

sowie $a^0 := 1$ und $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$.

Ähnlich wie im Beweis von Satz 1.7.5 zeigt man $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Darüberhinaus sieht man leicht, das $\sqrt[n]{a}$ die einzige positive reelle Zahl ist, deren n-te Potenz a ist, d. h., $\{x \in \mathbb{R} : x^n = a\} = \{\sqrt[n]{a}\}$. Desweiteren zeigt man leicht, dass $a^{\frac{m}{n}}$ wohldefiniert ist, d. h., dass für $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ auch $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$ gilt.

Satz 1.7.6 *Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iii) $(ab)^r = a^r b^r$,

(iv) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$,

(v) $a < b \wedge r > 0 \Rightarrow a^r < b^r$ *und* $a < b \wedge r < 0 \Rightarrow a^r > b^r$,

(vi) $r < s \wedge a > 1 \Rightarrow a^r < a^s$ *und* $r < s \wedge a < 1 \Rightarrow a^r > a^s$.

Der Beweis sei als Übung überlassen. Man kann die Idee in Definition 1.7.1 auch benutzen, um die Potenz a^x für $a \in \mathbb{R}_+$ und $x \in \mathbb{R}$ durch

$$a^x := \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \wedge r \leq x\}$$

zu definieren. Wir werden dies später (in §2.5) auf etwas anderem Wege tun.

Mit Hilfe der folgenden Definition werden wir einen weiteren wichtigen Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ beschreiben.

Definition 1.7.2 Es sei M Menge, $M \neq \emptyset$.

- M heißt *endlich*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion (d. h., eine bijektive Abbildung) $\phi : \{1, \ldots, n\} \to M$ gibt.
- M heißt *abzählbar unendlich*, falls es eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \to M$ gibt.
- M heißt *höchstens abzählbar*, falls M endlich oder abzählbar ist.
- M heißt *überabzählbar*, falls M nicht endlich oder abzählbar ist.

Der Begriff "abzählbar" wird in der Literatur uneinheitlich verwendet. Mal entspricht er unserem "abzählbar unendlich", mal unserem "höchstens abzählbar".

Satz 1.7.7 *$\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.*

Beweisskizze. Wir beginnen mit 0, durchlaufen die Zahlen $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ wie in dem folgenden Schema angedeutet und fügen die Zahl $-\frac{m}{n}$ hinter $\frac{m}{n}$ ein.

$$
\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \dots \\
\hline
1 & 1 & \rightarrow & 2 & & 3 & \rightarrow & 4 & & 5 & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
2 & \frac{1}{2} & & 1 & & \frac{3}{2} & & 2 & & \frac{5}{2} & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
3 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & 1 & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
4 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & 1 & & \frac{5}{4} & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
5 & \frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & 1 & \\
\dots & \dots & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Bereits einmal durchlaufene Zahlen lassen wir weg und kommen so zu folgender Anordnung der rationalen Zahlen:

$$0, 1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, 4, -4, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \dots$$

Die durch $\phi(1) = 0, \phi(2) = 1, \phi(3) = -1, \phi(4) = 2, \dots$ definierte Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ist dann bijektiv. $\square$

Satz 1.7.8 $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, formulieren wir folgendes Resultat.

Satz 1.7.9 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $I(n)$ gegeben, d. h., es sei I eine Abbildung von $\mathbb{N}$ in die Menge der beschränkten, abgeschlossenen Intervalle. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $I(n+1) \subset I(n)$. Dann gilt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset.$$

Der Beweis sei als Übung überlassen. (In der Formulierung des Satzes ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n)$ eine abkürzende Schreibweise für $\bigcap_{I \in \{I(\mathbb{N})\}} I$. Entsprechende Schreibweisen werden wir im folgenden häufiger benutzen.)

Oft wird die in Satz 1.7.9 angegebene Eigenschaft auch als Definition der Vollständigkeit genommen (anstelle der Eigenschaft, dass jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt). Dies führt aber zu einem anderen Vollständigkeitsbegriff, und zur Charakterisierung von $\mathbb{R}$ muss dann noch eine der Aussagen von Satz 1.7.2, Folgerung 1.7.1 oder Folgerung 1.7.2 hinzugenommen werden. Die hinzugenommene Aussage wird dann als *Archimedisches Axiom* bezeichnet.

Beweis von Satz 1.7.8. Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein abgeschlossenes Intervall $I(1)$ mit $\phi(1) \notin I(1)$. Weiter existiert ein abgeschlossenes Intervall $I(2) \subset I(1)$ mit $\phi(2) \notin I(2)$. Induktiv erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ein abgeschlossenes Intervall $I(n) \subset I(n-1)$ mit $\phi(n) \notin I(n)$. Nach Satz 1.7.9 ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I(n) \neq \emptyset$ und damit existiert $s \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I(n)$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt damit $s \in I(n)$, wegen $\phi(n) \notin I(n)$ also $s \neq \phi(n)$. Es folgt $s \notin \phi(\mathbb{N})$. Daher ist ϕ nicht surjektiv. $\square$

1.8 Komplexe Zahlen

Historisch tauchten komplexen Zahlen zuerst im 16. Jahrhundert bei der Lösung kubischer Gleichungen durch del Ferro, Tartaglia und Cardano auf. Diese fanden, dass eine Lösung der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ durch

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

gegeben ist, für $x^3 - 3x - 4 = 0$ etwa $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$. Für die Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$ erhält man

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Hier nützt einem die Lösungsformel nur dann etwas, wenn man die Ausdrücke $\sqrt{-121}$ und $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}}$ mit Sinn füllen kann und die üblichen Rechenregeln dafür gelten.

Andererseits zeigt Einsetzen, dass $x = 4$ eine Lösung der obigen Gleichung ist. Tatsächlich wird sich zeigen, dass bei geeigneter Definition von $\sqrt{-121}$ und $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}}$ auch

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

gilt.

Die Idee ist also, den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen so zu erweitern, dass Gleichungen wie $x^2 + 1 = 0$ eine Lösung haben. Ist etwa i eine Lösung dieser Gleichung, also $i^2 = -1$, so kann man Elemente der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten. Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erhält man, wenn man die üblichen Rechenregeln als gegeben hinnimmt, und zusätzlich die Regel $i^2 = -1$ benutzt, dann $(a + ib) \cdot (c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$.

Formal geht man wie folgt vor: auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definieren wir eine Addition "+" und eine Multiplikation "·" wie folgt:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d),$$
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Es gilt dann, dass $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ Körper ist. Dabei ist $(0, 0)$ das Nullelement und $(1, 0)$ das Einselement.

Wir verzichten darauf, alle Körperaxiome nachzuweisen, sondern beschränken uns exemplarisch auf zwei, nämlich (M4) (Existenz des multiplikativen Inversen) und (D) (Distributivgesetz).

Nachweis von (M4). Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2, (a, b) \neq (0, 0)$. Dann ist $a^2 + b^2 > 0$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) &= \left(a\frac{a}{a^2 + b^2} - b\frac{-b}{a^2 + b^2}, a\frac{-b}{a^2 + b^2} + b\frac{a}{a^2 + b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2}\right) \\
&= (1, 0).
\end{aligned}
$$

Es gilt also

$$(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Nachweis von (D). Seien $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}((a,b)+(c,d))\cdot(e,f) &= (a+c,b+d)\cdot(e,f)\\ &= ((a+c)e-(b+d)f,(a+c)f+(b+d)e)\\ &= (ae-bf+ce-df, af+be+cf+de)\\ &= (ae-bf,af+be)+(ce-df,cf+de)\\ &= (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)\end{aligned}$$

Wir nennen den erhaltenen Körper den Körper der *komplexen Zahlen* und bezeichnen ihn mit $(\mathbb{C},+,\cdot)$ oder kurz auch $\mathbb{C}$. (Es gilt also $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$!)

Weiter zeigt man leicht, dass $(\{(a,0) : a \in \mathbb{R}\},+,\cdot)$ ein Teilkörper von $(\mathbb{C},+,\cdot)$ ist. Dieser Teilkörper ist "isomorph" zum Körper $(\mathbb{R},+,\cdot)$, denn die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}, a \mapsto (a,0)$ ist bijektiv und erfüllt $\phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$ und $\phi(a\cdot b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$ für $a,b \in \mathbb{R}$.

Wir identifizieren daher die reelle Zahl a mit der komplexen Zahl $(a,0)$ und betrachten in diesem Sinne die reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{C}$. Weiter setzen wir $i := (0,1)$. Es gilt dann $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$ und $i\cdot a = (0,1)\cdot(a,0) = (0,a)$ für $a \in \mathbb{R}$. Damit ist $(a,b) = (a,0)+(0,b) = (a,0)+(0,1)\cdot(b,0) = a+ib$ für $a,b \in \mathbb{R}$. Im allgemeinen schreiben wir komplexe Zahlen in der letzten Form.

Wir führen einige weitere Bezeichungen ein. Dazu seien $x,y \in \mathbb{R}$ und damit $z := (x,y) = x+iy \in \mathbb{C}$. Wir nennen x den *Realteil* von z und y den *Imaginärteil* von z. Dafür benutzen wir die Notation $x = \mathrm{Re}\ z$ und $y = \mathrm{Im}\ z$.

Weiter heißt $\overline{z} := x-iy$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl* und $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag von z. (Man beachte, dass für $z \in \mathbb{R}$ der hier definierte Betrag mit dem vorher definierten übereinstimmt.) Wir stellen einige Rechenregeln zusammen, die für alle $z,w \in \mathbb{C}$ gelten.

(i) $|z| \geq 0$

(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(iii) $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w}$

(iv) $\overline{z\cdot w} = \overline{z}\cdot\overline{w}$

(v) $z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}\ z$

(vi) $z-\overline{z} = 2i\mathrm{Im}\ z$

(vii) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(viii) $z\cdot\overline{z} = |z|^2$

(ix) $z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$

(x) $|\overline{z}| = |z|$

(xi) $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$

(xii) $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$

(xiii) $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$

(xiv) $|z+w| \leq |z|+|w|$ (Dreiecksungleichung)

(xv) $||z|-|w|| \leq |z-w|$

Wir beweisen hier nur einige der obigen Rechenregeln. Dazu sei $z = x+iy$ und $w = u+iv$, mit $x,y,u,v \in \mathbb{R}$.

zu (iv):

$$\begin{aligned}\overline{zw} &= \overline{(x+iy)(u+iv)}\\ &= \overline{xu-yv+i(xv+yu)}\\ &= xu-yv-i(xv+yu)\\ &= xu-(-y)(-v)+i(x(-v)+(-y)u)\\ &= (x-iy)(u-iv)\\ &= \overline{z}\,\overline{w}\end{aligned}$$

zu (viii): $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = |z|^2$

zu (xiii): Nach den gerade bewiesenen Rechenregeln ist

$$|z\cdot w|^2 = z\cdot w\cdot\overline{z\cdot w} = z\cdot w\cdot\overline{z}\cdot\overline{w} = z\cdot\overline{z}\cdot w\cdot\overline{w} = |z|^2\cdot|w|^2$$

und damit $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$.

zu (xiv): Es ist

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}\\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})\\ &= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}\\ &= |z|^2+z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}+|w|^2\\ &= |z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2\\ &\leq |z|^2+2|z\overline{w}|+|w|^2\\ &= |z|^2+2|z|\cdot|w|+|w|^2\\ &= (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

und damit $|z+w| \leq |z|+|w|$.

Identifizieren wir die komplexe Zahl $z = x+iy = (x,y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Punkt der Ebene mit Koordinaten x und y, so können wir die Addition komplexer Zahlen geometrisch deuten. Sie entspricht der Addition von Vektoren; siehe Abbildung 2. Der Betrag $|z|$ ist der Abstand von z zum Ursprung des Koordinatensystems.

Auch die Multiplikation komplexer Zahlen kann geometrisch gedeutet werden. Dies wird erst später erfolgen.

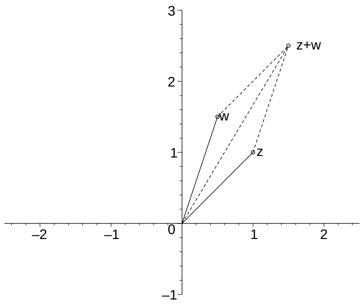

Abbildung 2: Geometrische Interpretation der Addition komplexer Zahlen.

Satz 1.8.1 *Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$.*

Beweis. Ist $w \in \mathbb{R}$, $w \leq 0$, so hat $z = i\sqrt{-w}$ die gewünschte Eigenschaft. Andernfalls gilt $|w| + \mathrm{Re}\ w > 0$ und (zur Übung empfohlenes!) Nachrechnen zeigt, dass

$$z = \frac{|w| + w}{\sqrt{2}\sqrt{|w| + \mathrm{Re}\ w}}$$

die geforderte Eigenschaft hat. □

Allgemeiner zeigt man (durch quadratische Ergänzung), dass für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 + az + b = 0$ eine Lösung hat. Noch allgemeiner gilt der folgende Satz.

Satz 1.8.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei p ein Polynom vom Grad n, das heißt, es existieren $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$, so dass $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ gilt. Dann existiert $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_1) = 0$.*

Einen *Beweis* dieses Satzes lernt man z. B. in einer Einführung in die Funktionentheorie kennen, wie sie i. a. in der Analysis IV geboten wird.

Sind p und z_1 wie in Satz 1.8.2, so existiert ein Polynom vom Grad $n - 1$, so dass $p(z) = (z - z_1)p_1(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Ist $n \geq 2$, so kann Satz 1.8.2 auf p_1 angewendet werden, und induktiv erhält man, dass $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ existieren, so dass $p(z) = a_n(z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$.

Satz 1.8.3 *Der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ kann nicht angeordnet werden.*

Beweis. Es sei $\leq$ Ordnung und $<$ die zugehörige strikte Ordnung. Dann ist $0 < i^2 = -1$ und $0 < 1^2 = 1$. Es folgt $0 < -1 + 1 = 0$. Widerspruch! □

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Definition 2.1.1 Eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ heißt *Folge*. Falls außerdem der Zielbereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist, heißt sie (reelle bzw. komplexe) *Zahlenfolge*.

Sei M Menge und $f : \mathbb{N} \to M$ Folge. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir statt $f(n)$ im allgemeinen f_n. Wir bezeichnen die Folge f mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder kurz auch einfach mit (f_n). Gelegentlich schreiben wir auch $(f_1, f_2, f_3, \ldots)$. Jede reelle Zahlenfolge kann auch als komplexe Zahlenfolge betrachtet werden.

Manchmal werden wir für ein $N \in \mathbb{Z}$ und eine Menge M auch Funktionen $f : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq N\} \to M$ betrachten. Wir werden auch diese (Zahlen)folgen nennen und mit $(f_n)_{n\geq N}$ bezeichnen.

Begriffe wie "injektiv" sind, da sie für Funktionen definiert sind, insbesondere auch für Folgen erklärt. Begriffe wie "(nach oben/unten) beschränkt" oder "(streng) monoton fallend/steigend" definiert man für reelle Zahlenfolgen, indem man auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ die Ordnung "$\leq$" zugrunde legt.

Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) heißt beschränkt, falls die reelle Zahlenfolge $(|a_n|)$ beschränkt ist. (Dabei kommt es natürlich nur darauf an, dass $(|a_n|)$ nach oben beschränkt ist, denn nach unten ist diese Folge immer durch 0 beschränkt).

Beispiel. Wir betrachten die reelle Zahlenfolge (a_n) wobei $a_n = \frac{n+1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es ist also $(a_n) = (2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots)$.
Behauptung 1. (a_n) ist monoton fallend.
Beweis. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$. Zu zeigen ist, dass $a_n \leq a_m$. Nun gilt aber

$$\begin{aligned} a_n \leq a_m \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n+1}{n} \leq \frac{m+1}{m} \\ &\Leftrightarrow \quad (n+1)m \leq (m+1)n \\ &\Leftrightarrow \quad nm + m \leq mn + n \\ &\Leftrightarrow \quad m \leq n. \quad \square \end{aligned}$$

Genauso sieht man, dass (a_n) sogar streng monoton fallend ist.
Behauptung 2. (a_n) ist beschränkt.
Beweis. (i) Da (a_n) monoton fallend ist, gilt $a_n \leq a_1 = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist 2 obere Schranke von (a_n) und damit ist (a_n) nach oben beschränkt.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n+1 > n$, also $a_n = \frac{n+1}{n} > 1$. Also ist 1 untere Schranke von (a_n) und damit ist (a_n) nach unten beschränkt.

Aus (i) und (ii) folgt, dass (a_n) beschränkt ist. □

Im obigen Beispiel ist a_n nahe dem Wert 1, wenn n groß ist. Wir präzisieren diesen Gedanken in der folgenden Definition.

Definition 2.1.2 Sei (a_n) (komplexe) Zahlenfolge. Dann heißt (a_n) *konvergent*, falls $a \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft existiert:

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wir schreiben in diesem Falle $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to a$ (für $n \to \infty$) und sagen, dass (a_n) gegen a konvergiert. Wir nennen a den *Grenzwert* der Folge (a_n).

Eine Zahlenfolge, die nicht konvergent ist, heißt *divergent*.

Es ist nützlich, die Definition der Konvergenz noch einmal mit Quantoren zu schreiben. Es ist (a_n) konvergent, falls gilt:

$$\exists a \in \mathbb{C}\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Die Idee bei der Definition der Konvergenz ist, $|a_n - a|$ als Abstand von a_n zu a zu interpretieren. Dieser Abstand kann dann im Konvergenzfall beliebig klein gemacht werden, indem man n groß wählt.

Dieser Gedanke kann wesentlich verallgemeinert werden. So werden wir später in recht allgemeinem Rahmen einen Abstandsbegriff (Metrik) definieren, und Konvergenz von Folgen in mit diesem Abstandsbegriff versehene Mengen (metrische Räume) untersuchen.

Beispiel (Fortsetzung). Sei wieder $a_n = \frac{n+1}{n}$.
Behauptung. (a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$.

Wir behaupten, dass $N := [1/\varepsilon] + 1$ die verlangte Eigenschaft hat. (Es sei daran erinnert, dass für eine reelle Zahl x mit der Gaußklammer $[x]$ die größte ganze Zahl bezeichnet wird, die nicht größer als x ist.) Zunächst ist dann $N > 1/\varepsilon$ und damit $1/N < \varepsilon$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Dann ist

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \quad \square$$

Im folgenden werden wir statt "(a_n) ist konvergent und $\lim_{n\to\infty} a_n = a$" oft nur kurz "$\lim_{n\to\infty} a_n = a$" schreiben. Wenn wir also den Grenzwert angeben, wird damit seine Existenz (also die Konvergenz) impliziert.

Eine andere Beschreibung des Konvergenzbegriffs erhält man wie folgt. Sei $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$, $a \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Dann heißt $\{x \in X : |x - a| < \varepsilon\}$ die *ε-Umgebung* von a (in X). Geometrisch ist die *ε-Umgebung* von a im Falle $X = \mathbb{C}$ eine Kreisscheibe vom Radius ε um a und im Falle $X = \mathbb{R}$ eine offenes Intervall der Länge 2ε um a. Eine Teilmenge U von X heißt *Umgebung* von a, wenn $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die ε-Umgebung von a in U enthalten ist.

Es zeigt sich, dass (a_n) genau dann gegen a konvergiert, wenn für jede Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n \in U$ für $n \geq N$.

Der Begriff der Umgebung lässt sich in noch allgemeineren Zusammenhängen erklären als der der Metrik. Insofern ist die Beschreibung der Konvergenz über Umgebungen stärker verallgemeinerungsfähig als die in Definition 2.1.1 gegebene. Solche Fragen werden in der *Topologie* behandelt.

Wir haben bei einer konvergenten Folge bereits von *dem* Grenzwert und nicht nur von *einem* Grenzwert gesprochen. Dies wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.1.1 *Eine konvergente Zahlenfolge hat genau einen Grenzwert.*

Beweis. Die Existenz eines Grenzwertes folgt aus der Definition. Wir haben also nur die Eindeutigkeit des Grenzwertes zu zeigen.

Dazu nehmen wir an, dass a und b Grenzwerte der konvergenten Zahlenfolge (a_n) seien, mit $a \neq b$. Dann ist $|a - b| > 0$ und mit $\varepsilon := \frac{|a-b|}{2}$ auch $\varepsilon > 0$.

Nach Definition 2.1.1 existiert nun $N_a \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N_a$ und es existiert $N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann

$$|a - b| = |(a - a_N) + (a_N - b)| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Zur Übung führen wir denselben Beweis in der Terminologie der Umgebungen: Seien a, b, ε wie vorher. Dann sind die ε-Umgebungen von a und b disjunkt, denn ist x aus beiden Umgebungen, so gilt

$$|a - b| = |(a - x) + (x - b)| \leq |a - x| + |x - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |a - b|.$$

Damit kann jedes a_n nur in höchstens einer dieser Umgebungen liegen, womit nur eine der Zahlen a und b Grenzwert von (a_n) sein kann.

Satz 2.1.2 *Eine konvergente Zahlenfolge ist beschränkt.*

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge und sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$. (Wir haben in Definition 2.1.2 $\varepsilon := 1$ gewählt.) Damit folgt für $n \geq N$, dass

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Mit $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$ folgt dann $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Beispiel 1. Es sei $q \in \mathbb{C}$ und die komplexe Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch $a_n = q^n$.

Fall 1. $|q| > 1$. Wir zeigen, dass (a_n) unbeschränkt und damit wegen Satz 2.1.2 divergent ist.

Sei dazu $M \in \mathbb{R}_+$. Wir haben zu zeigen, dass $n \in \mathbb{N}$ mit $|q^n| > M$ existiert. Dazu setzen wir $h := |q| - 1$. Dann ist $h > 0$ und $|q| = 1 + h$. Es folgt

$$|q^n| = |q|^n = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geq \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} h^k = 1 + nh \geq nh.$$

Für $n > M/h$ folgt also $|a_n| \geq nh > M$.

Fall 2. $|q| < 1$. Wir zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Wir haben zu zeigen, dass $N \in \mathbb{N}$ mit $|q^n - 0| < \varepsilon$ für $n \geq N$ existiert. Dies ist klar falls $q = 0$. Sei also $q \neq 0$. Wir setzen $h := \frac{1}{|q|} - 1$. Es ist dann $|q| = \frac{1}{1+h}$. Wegen $\frac{1}{|q|} > 1$ ist $h > 0$. Wählt man $N > \frac{1}{\varepsilon h}$, so folgt für $n \geq N$, dass

$$|q^n - 0| = |q|^n = \left(\frac{1}{1+h}\right)^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{nh} \leq \frac{1}{Nh} < \varepsilon.$$

Fall 3. $|q| = 1$. Hier zeigt sich, dass für $q = 1$ Konvergenz gegen 1 vorliegt, während die Folge für $q \neq 1$ divergent ist. Wir verzichten hier auf die Details.

Bemerkung. Die in Fall 1 benutzte Ungleichung $(1+h)^n \geq 1+nh$ heißt *Bernoullische Ungleichung.* Sie gilt nicht nur für $h > 0$ sondern sogar für $h > -1$ (und $n \in \mathbb{N}$). Der Beweis sei als Übung überlassen.

Beispiel 2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ für $n \geq N$ existiert.

Dazu notieren wir zunächst, dass offensichtlich $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt also $h_n \geq 0$. Für $n \geq 2$ folgt

$$n = \left(\sqrt[n]{n}\right)^n = (1+h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2.$$

Es gilt also $h_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ und damit $h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ für $n \geq 2$. Wählt man also $N > \max\{2, \frac{2}{\varepsilon^2} + 1\}$, so folgt für $n \geq N$, dass

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |h_n| = h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \leq \sqrt{\frac{2}{N-1}} < \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right) - 1}} = \varepsilon. \quad \square$$

2.2 Rechenregeln

Satz 2.2.1 *Seien $(a_n), (b_n)$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a, b_n \to b$. Sei $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(i) *$(a_n + b_n)$ ist konvergent und $a_n + b_n \to a + b$,*

(ii) *$(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$,*

(iii) *$(c \cdot a_n)$ ist konvergent und $c \cdot a_n \to c \cdot a$,*

(iv) *Ist $b \neq 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $b_n \neq 0$ für $n \geq N$, und es ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq N}$ konvergent mit $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Beweis. (i). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann für $n \geq N$, dass

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii). Es ist

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - a b_n + a b_n - ab = (a_n - a) b_n + a(b_n - b).$$

Nach Satz 2.1.2 ist (b_n) beschränkt, d. h., es existiert $M \in \mathbb{R}_+$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für $n \geq N_a$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)}$ für $n \geq N_b$. Mit $N := \max\{N_a, N_b\}$ folgt dann für $n \geq N$, dass

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a) b_n + a(b_n - b)| \\ &\leq |(a_n - a) b_n| + |a(b_n - b)| \\ &= |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} M + |a| \frac{\varepsilon}{2(|a|+1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii). Dies folgt aus (ii) mit $b_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv). Sei $b \neq 0$. Dann gilt $\frac{|b|}{2} > 0$ und damit existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$. Es folgt $\frac{|b|}{2} > |b| - |b_n|$ und damit $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ für $n \geq N$. Insbesondere gilt also $b_n \neq 0$ für $n \geq N$.

Wir zeigen jetzt, dass $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq N}$ gegen $\frac{1}{b}$ konvergiert. Dazu notieren wir zunächst, dass für $n \geq N$

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}$$

gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|^2 \varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Mit $N'' := \max\{N, N'\}$ folgt dann für $N \geq N''$, dass

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Damit gilt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Aus (ii) folgt jetzt $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$. $\square$

Satz 2.2.2 *Eine komplexe Zahlenfolge (a_n) konvergiert genau dann, wenn die reellen Zahlenfolgen $(\mathrm{Re}\, a_n)$ und $(\mathrm{Im}\, a_n)$ konvergieren. Es gilt dann $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = \mathrm{Re}(\lim_{n\to\infty} a_n)$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, a_n = \mathrm{Im}(\lim_{n\to\infty} a_n)$.*

Beweis. "$\Leftarrow$". Dies folgt aus Satz 2.2.1, (i) und (iii).

"$\Rightarrow$". Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Die Behauptung folgt dann aus $|\mathrm{Re}\, a_n - \mathrm{Re}\, a| = |\mathrm{Re}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$ und $|\mathrm{Im}\, a_n - \mathrm{Im}\, a| = |\mathrm{Im}(a_n - a)| \leq |a_n - a|$. $\square$

Satz 2.2.3 *Wenn die komplexe Zahlenfolge (a_n) gegen a konvergiert, so konvergieren $(|a_n|)$ gegen $|a|$ und $(\overline{a_n})$ gegen $\overline{a}$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ und $|\overline{a_n} - \overline{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$. $\square$

Wir betrachten noch einmal das Beispiel der durch $a_n := q^n$ definierten komplexen Zahlenfolge (a_n), wobei $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$. Gilt dann $a_n \to a$, so folgt $|a_n| \to |a|$. Wegen $|a_n| = |q^n| = |q|^n = 1^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert dies $|a| = 1$. Weiter gilt auch $a_{n+1} \to a$. Andererseits gilt aber auch $a_{n+1} = q a_n \to qa$. Es folgt $a = qa$. Wegen $|a| = 1$ ist aber $a \neq 0$. Damit folgt $q = 1$. Für $q \in \mathbb{C}$, $|q| = 1$, konvergiert also die komplexe Zahlenfolge (q^n) genau dann, wenn $q = 1$.

Satz 2.2.4 *Seien (a_n), (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le b_n$ für alle $n \ge N$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$. Wir nehmen an, dass $a > b$ gilt. Dann ist $a - b > 0$ und damit auch $\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Also existieren $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N_a$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \ge N_b$. Sei $N' := \max\{N_a, N_b\}$. Für $n \ge N'$ gilt dann $b_n - b < \varepsilon$ und $a - a_n < \varepsilon$. Es folgt $(b_n - b) + (a - a_n) < 2\varepsilon$ und damit $b_n - a_n < 2\varepsilon + b - a = 0$ für $n \ge N'$. Es folgt $b_n < a_n$ für $n \ge N'$. Dies ist ein Widerspruch. □

Man beachte, dass aus $a_n < b_n$ für $n \ge N$ nicht $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$ gefolgert werden kann. Ein Gegenbeispiel ist etwa durch $a_n = -\frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n}$ gegeben. Hier sind beide Grenzwerte 0.

Eine wichtiger Spezialfall von Satz 2.2.4 ist der Fall, dass eine der Folgen (a_n), (b_n) konstant ist. So folgt etwa aus $a_n \to a$ und $a_n \le b$ für $n \ge N$, dass $a \le b$ gilt.

Satz 2.2.5 *Seien (a_n), (b_n), (c_n) reelle Zahlenfolgen. Es existiere $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \ge N$. Sind dann (a_n) und (c_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$, so ist auch (b_n) konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a_n) und (c_n).*

Beweis. Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $N_a, N_c \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N_a$ und $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \ge N_c$. Mit $N_b := \max\{N, N_a, N_c\}$ folgt dann für $n \ge N_b$, dass $a - b_n \le a - a_n \le |a_n - a| < \varepsilon$ und $b_n - a \le c_n - a \le |c_n - a| < \varepsilon$, also $|b_n - a| < \varepsilon$. □

Beispiel. Sei $b \in \mathbb{R}_+$. Für $n \ge \max\{b, \frac{1}{b}\}$ ist dann $\frac{1}{n} \le b \le n$ und damit $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \le \sqrt[n]{b} \le \sqrt[n]{n}$. Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ folgt $\sqrt[n]{b} \to 1$.

2.3 Konvergenzkriterien

Satz 2.3.1 *Sei (a_n) eine monoton steigende (bzw. fallende) und nach oben (bzw. unten) beschränkte reelle Zahlenfolge. Dann ist (a_n) konvergent.*

Ist $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$).

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, dass (a_n) monton steigend und nach oben beschränkt ist. (Der andere Fall kann darauf zurückgeführt werden.) Sei $a := \sup A$. Zu zeigen ist, dass $a_n \to a$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Satz 1.6.4 existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N > a - \varepsilon$. Wegen der Monotonie von (a_n) folgt $a_n > a - \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Andererseits gilt $a_n \le a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $a = \sup A$. Es folgt $|a_n - a| = a - a_n < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

Beispiel 1. Wir betrachten die *rekursiv* definierte Folge (a_n) mit $a_1 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

für $n \in \mathbb{N}$. Offensichtlich gilt $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Formaler Beweis durch vollständige Induktion.) Genauer gilt sogar, dass $a_n \ge \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist

klar für $n = 1$ und folgt für $n \ge 2$ wegen

$$\begin{aligned}
a_n^2 - 2 &= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right)^2 - 2 \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 + 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2}\right) - 2 \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1}^2 - 4 + \frac{4}{a_{n-1}^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(a_{n-1} - \frac{2}{a_{n-1}}\right)^2 \\
&\ge 0
\end{aligned}$$

und $a_n > 0$. Desweiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a_{n+1} \le a_n$, denn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{a_n^2}\right) \overset{a_n \ge \sqrt{2}}{\le} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{2}\right) = 1.$$

Hieraus folgt unmittelbar (durch vollständige Induktion), dass $a_m \le a_n$ für $m \ge n$ gilt, d. h., die Folge (a_n) ist monoton fallend. Nach Satz 2.3.1 konvergiert (a_n) also gegen $a = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Um den Grenzwert a zu bestimmen, notieren wir zunächst, dass wegen $a_n \ge \sqrt{2}$ nach Satz 2.2.4 auch $a \ge \sqrt{2}$ gilt. Außerdem gilt auch $a_{n+1} \to a$, und aus der Rekursionsformel und Satz 2.2.1 folgt damit $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right)$. Dies ergibt aber $\frac{a}{2} = \frac{1}{a}$ und damit $a^2 = 2$, wegen $a \ge \sqrt{2}$ also $a = \sqrt{2}$.

Allgemeiner kann man wie oben zeigen, dass für $c > 0, a_1 > 0$ und

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right)$$

folgt, dass $a_n \to \sqrt{c}$.

Mit diesem Verfahren kann man die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren. Das Verfahren ist nach Heron von Alexandria (1. Jhdt. n. Chr.) benannt, war aber den Babyloniern bereits 2000 Jahre vorher bekannt. Heute wird es im Schulunterricht i. A. in der 9. Klasse behandelt.

Beispiel 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n$. Dann ist (a_n) monoton steigend, denn für $n \ge 2$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \\
&\overset{\text{Bernoulli}}{\ge} \left(1 - n\frac{1}{n^2}\right) \frac{n}{n-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, dass (b_n) monoton fallend ist. Damit gilt

$$a_1 \leq a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n \leq b_1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 2.3.1 existieren damit $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ and $b_n \to b$. Wegen $a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$ folgt $a = b$ nach Satz 2.2.1, (ii).

Der gemeinsame Grenzwert von (a_n) und (b_n) heißt *Eulersche Zahl* und wird mit e bezeichnet. Es gilt $e = 2,718\ldots$.

Definition 2.3.1 Sei (a_n) Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a *Häufungswert* von (a_n), falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existieren.

Die Bedingung, dass unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ existieren, ist äquivalent dazu, dass zu vorgegebenem $N \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $|a_n - a| < \varepsilon$ existiert. In Quantorenschreibweise lautet die letzte Bedingung wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \forall N \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \wedge |a_n - a| < \varepsilon.$$

Als Beispiel betrachten wir die durch $a_n = (-1)^n$ gegebene Folge (a_n). Hier sind 1 und -1 Häufungswerte.

Definition 2.3.2 Sei X Menge, $a : \mathbb{N} \to X$ Folge und $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton steigende Folge. Dann heißt die Folge $a \circ \nu : \mathbb{N} \to X$ eine *Teilfolge* von a. Sie wird mit $(a_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ oder $(a_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Satz 2.3.2 *Sei (a_n) Zahlenfolge und $a \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(i) *a ist Häufungswert von (a_n) $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Teilfolge von (a_n), die gegen a konvergiert.*

(ii) *a ist Grenzwert von (a_n) $\Leftrightarrow$ Alle Teilfolgen von (a_n) konvergieren gegen a.*

Der *Beweis* sei als Übung überlassen.

Satz 2.3.3 (Satz von Bolzano-Weierstraß) *Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Im Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß werden wir folgenden Satz benutzen.

Satz 2.3.4 *Jede reelle Zahlenfolge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Hierbei bedeutet "monoton" natürlich "monoton steigend oder monoton fallend".

Beweis von Satz 2.3.4. Sei (a_n) reelle Zahlenfolge. Wir nennen $m \in \mathbb{N}$ *Gipfel* von (a_n), falls $a_n < a_m$ für alle $n > m$.

Fall 1. Es existieren unendlich viele Gipfel. Seien $m_1, m_2, m_3, \ldots$ Gipfel mit $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$. Dann ist (a_{m_k}) monoton fallende Teilfolge von (a_n).

Fall 2. Es existieren höchstens endlich viele Gipfel. Dann existiert $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1$ keine Gipfel sind. Insbesondere ist n_1 kein Gipfel und damit existiert $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \geq a_{n_1}$. Auch n_2 ist kein Gipfel, also existiert

$n_3 > n_2$ mit $a_{n_3} \geq a_{n_2}$, und n_3 ist kein Gipfel. Induktiv erhält man so eine monoton steigende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n). $\square$

Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß. Sei (a_n) beschränkte Zahlenfolge. Wir betrachten zunächst den Fall, dass (a_n) reelle Zahlenfolge ist. Dann besitzt (a_n) nach Satz 2.3.4 eine monotone Teilfolge besitzt. Diese Teilfolge ist natürlich auch beschränkt, und damit konvergent nach Satz 2.3.1.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass (a_n) (beschränkte) komplexe Zahlenfolge ist. Dann sind die Folgen $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ reell und beschränkt. Nach dem bereits bewiesenen besitzt $(\operatorname{Re} a_n)$ eine konvergente Teilfolge $(\operatorname{Re} a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, und die Folge $(\operatorname{Im} a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge $\left(\operatorname{Im} a_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Es folgt, dass $\left(a_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. $\square$

Definition 2.3.3 Eine Zahlenfolge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$.

In Quantorenschreibweise lautet die Definition wie folgt:

$$\begin{aligned} & (a_n) \text{ ist Cauchyfolge} \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} : (m \geq N \wedge n \geq N) \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Satz 2.3.5 (Cauchykriterium für Folgen) *Eine Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie Cauchyfolge ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ and $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N$. Gilt dann $m \geq N$ und $n \geq N$, so folgt

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

"$\Leftarrow$": Sei (a_n) Cauchyfolge. Zu zeigen ist, dass (a_n) konvergiert. Wir zeigen zunächst (ähnlich wie im Beweis von Satz 2.1.2), dass (a_n) beschränkt ist. Dazu notieren wir, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n - a_m| < 1$ für $m, n \geq N$. Es folgt $|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|$ für $n \geq N$, und damit $|a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, 1 + |a_N|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert also eine konvergente Teilfolge von (a_n), etwa $a_{n_k} \to a$.

Wir zeigen jetzt, dass $a_n \to a$ gilt. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $K \in N$ mit $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$. Außerdem existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $m, n \geq N$. Sei nun $n \geq N$. Dann existiert $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \geq K$ und $n_\ell \geq N$. Es folgt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_\ell}| + |a_{n_\ell} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Wichtig bei obigem Satz sowie den Sätzen 2.3.1 und 2.3.2 ist, dass sie erlauben, die Konvergenz einer Folge nachzuweisen, *ohne den Grenzwert zu kennen*. Das Entscheidende dabei ist die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Umgekehrt könnte man auch wieder die Vollständigkeit dadurch definieren, dass man die Konvergenz jeder Cauchyfolge verlangt. Dann müsste man aber, um dem

Vollständigkeitsbegriff von Definition 1.6.3 zu erhalten, noch zusätzlich das Archimedische Axiom verlangen; vgl. die Diskussion nach Satz 1.7.9. (Wir werden aber später in metrischen Räumen Vollständigkeit auf diesem Wege definieren.)

Exkurs: Konstruktion der reellen Zahlen. Wir wollen den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen zum Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen "vervollständigen". Dazu sei C die Menge der Cauchyfolgen rationaler Zahlen. Wir betrachten die auf C durch

$$(x_n) \sim (y_n) :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$$

definierte Relation $\sim$.

Man zeigt leicht, dass $\sim$ Äquivalenzrelation ist. Um etwa die Transivität zu zeigen, seien $(x_n), (y_n), (z_n) \in C$ mit $(x_n) \sim (y_n)$ und $(y_n) \sim (z_n)$. Dann gilt $(x_n - y_n) \to 0$ und $(y_n - z_n) \to 0$ und damit $(x_n - z_n) = (x_n - y_n) + (y_n - z_n) \to 0$, also $(x_n) \sim (z_n)$.

Auf der Menge $C/\sim$ der Äquivalenzklassen definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$[(x_n)] + [(y_n)] := [(x_n + y_n)]$$

und

$$[(x_n)] \cdot [(y_n)] := [(x_n \cdot y_n)].$$

Zunächst muss man zeigen, dass diese Addition und Multiplikation von Äquivalenzklassen wohldefiniert sind. Dazu muss man zum einen zeigen, dass mit $(x_n), (y_n) \in C$ auch $(x_n + y_n) \in C$ und $(x_n \cdot y_n) \in C$ gilt, und zum andern, dass für $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n)$ auch $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ und $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$ gilt. Wir verzichten hier auf den Beweis dieser Aussagen.

Es gilt dann, dass $(C/\sim, +, \cdot)$ Körper ist. Auf einen Nachweis der einzelnen Körperaxiome verzichten wir. Das Nullelement des Körpers ist $[(0, 0, 0, \dots)]$ und das Einselement ist $[(1, 1, 1, \dots)]$.

Wir definieren eine Ordnung $\leq$ auf $C/\sim$ wie folgt:

$$[(x_n)] \leq [(y_n)] :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n + \varepsilon.$$

(Man beachte hier, dass die "naive" Setzung $[(x_n)] \leq [(y_n)] :\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n$ hier *nicht* zum Erfolg führt. Diese ist noch nicht einmal wohldefiniert. Beispielsweise ist ja $[(\frac{1}{n})] = [(-\frac{1}{n})]$.)

Zunächst muss man wieder zeigen, dass $\leq$ wohldefiniert ist. Sei dazu $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n)$ und es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \leq y_n + \varepsilon.$$

Zu zeigen ist

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x'_n \leq y'_n + \varepsilon.$$

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert M mit $x_n \leq y_n + \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq M$. Weiter existieren $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_x$ und $|y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $n \geq N_y$. Für $n \geq \max\{M, N_x, N_y\}$ folgt dann

$$x'_n < x_n + \frac{\varepsilon}{3} < y_n + 2\frac{\varepsilon}{3} < y'_n + 3\frac{\varepsilon}{3} = y'_n + \varepsilon.$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\leq$ tatsächlich Ordnung ist. Ebenso kann man nachrechnen, dass die Ordnungsaxiome (O1) und (O2) erfüllt sind. Damit erhält man, dass $(C/\sim, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper ist.

Man kann $r \in \mathbb{Q}$ mit der Äquivalenzklasse $[(r, r, r, \dots)]$ identifizieren. In diesem Sinne ist $\mathbb{Q}$ Teilkörper von $C/\sim$. Formal betrachtet man wieder die injektive Abbildung $i : \mathbb{Q} \to C/\sim, r \mapsto [(r, r, r, \dots)]$. Es gilt für $r, s \in \mathbb{Q}$ dann, dass $i(r + s) = i(r) + i(s)$, $i(r \cdot s) = i(r) \cdot i(s)$ und $r \leq s \Leftrightarrow i(r) \leq i(s)$.

Schließlich zeigt man dann, dass $(C/\sim, +, \cdot)$ vollständig ist. Dies kann man beispielsweise tun, indem man Folgendes zeigt:

- Jede Cauchyfolge in $(C/\sim, +, \cdot)$ ist konvergent.
- In $(C/\sim, +, \cdot)$ gilt das Archimedische Axiom.
- Ein angeordneter Körper, in dem das Archimedische Axiom gilt und in dem jede Cauchyfolge konvergiert, ist vollständig.

Wir verzichten hier auf die Einzelheiten.

2.4 Limes superior und inferior sowie uneigentliche Grenzwerte

Sei (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{a_k : k \geq n\}$. Dann ist A_n beschränkt und damit existiert $\sup A_n$. Ist $m \leq n$, so gilt $A_n \subset A_m$ und damit $\sup A_n \leq \sup A_m$. Die Folge $(\sup A_n)$ ist also monoton fallend. Außerdem ist sie beschränkt. Deshalb ist sie nach Satz 2.3.1 konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} \sup A_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup A_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$.

Definition 2.4.1 Sei (a_k) reelle Zahlenfolge. Dann heißen

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k$$

Limes superior und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k$$

Limes inferior von (a_n), falls die Suprema und Infima rechts existieren.

Statt $\limsup$ schreibt man auch $\overline{\lim}$ und statt $\liminf$ schreibt man auch $\underline{\lim}$. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass Limes superior und inferior immer existieren, wenn (a_n) beschränkt ist. Umgekehrt sieht man sofort, dass aus der Existenz des Limes superior die Beschränktheit von (a_n) nach oben und aus der des Limes inferior die Beschränktheit nach unten folgt.

Wegen $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf A_n$ und $\inf A_n \leq \sup A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit Satz 2.2.4, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

gilt.

Satz 2.4.1 *Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn der Limes superior und inferior beide existieren und den gleichen Wert haben.*

Beweis. "$\Rightarrow$". Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Es folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für $n \geq N$ und damit $a - \varepsilon \leq \inf_{k\geq N} a_k \leq \sup_{k\geq N} a_k \leq a + \varepsilon$. Damit gilt $a - \varepsilon < \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} a_k = \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} a_k < a + \varepsilon$.

"$\Leftarrow$". Sei $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = a$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < \inf_{k\geq n} a_k \leq \sup_{k\geq n} a_k < a + \varepsilon$ für $n \geq N$. Es folgt $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ und damit $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N$. $\square$

Satz 2.4.2 *Sei (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge und sei H die Menge der Häufungswerte von (a_n). Dann ist $H \neq \emptyset$ und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H$.*

Beweis. Es genügt, $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H$ zu zeigen.

Sei wieder $A_n := \{a_k : k \geq n\}$ und damit $a := \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup A_n$. Wir zeigen zunächst, dass $a \in H$. Aufgrund der Bemerkung nach Definition 2.3.1 haben wir Folgendes zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists k \in \mathbb{N} : k \geq N \wedge |a_k - a| < \varepsilon.$$

Sei also $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Zunächst existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|\sup A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Sei nun $n \geq \max\{N, N'\}$. Nach Satz 1.6.4 existiert $x \in A_n$ mit $x > \sup A_n - \frac{\varepsilon}{2}$, das heißt, es existiert $k \geq n \geq N$ mit $a_k > \sup A_n - \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen $a_k \leq \sup A_n$ ist also $|\sup A_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$|a_k - a| \leq |a_k - \sup A_n| + |\sup A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also gilt $a \in H$.

Wir zeigen nun, dass $a = \max H$. Sei dazu $b \in H$. Wir haben zu zeigen, dass $b \leq a$ gilt. Wir nehmen an, dass $b > a$ gilt. Dann ist $\varepsilon := b - a > 0$. Wieder existiert $N' \in \mathbb{N}$ mit $|\sup A_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N'$. Außerdem existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq N'$ und $|a_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$\varepsilon = b - a = b - a_k + a_k - a \leq |b - a_k| + |\sup A_k - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was ein Widerspruch ist. $\square$

Wir erweitern nun $\mathbb{R}$ durch Hinzufügen zweier Elemente ∞ (gelegentlich auch mit $+\infty$ bezeichnet) und $-\infty$ zu einer Menge $\overline{\mathbb{R}}$, also $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ erweitern wir zu einer Ordnung auf $\overline{\mathbb{R}}$, indem wir $-\infty < x$ und $x < \infty$ für $x \in \mathbb{R}$ und außerdem $-\infty < \infty$ setzen. Man rechnet leicht nach, dass $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ geordnete Menge ist. Es ist dabei jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ beschränkt, denn ∞ ist immer obere und $-\infty$ ist immer untere Schranke. Außerdem ist die geordnete Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ ordnungsvollständig. Um dies einzusehen, bezeichnen wir (vorübergehend) das Supremum in $(\mathbb{R}, \leq)$ mit $\sup_{\mathbb{R}}$ und das in $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$ mit $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}$. Sei nun $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Es zeigt sich dann, dass $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = \infty$ falls $\infty \in A$ oder falls $A \cap \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt ist, und dass $\sup_{\overline{\mathbb{R}}} A = \sup_{\mathbb{R}}(A \cap \mathbb{R})$ falls $\infty \notin A$ und

$A \cap \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt ist. Im verbleibenden Fall ist $\infty \notin A$ und $A \cap \mathbb{R} = \emptyset$, also $A = \{-\infty\}$ oder $A = \emptyset$, und es folgt $\sup A = -\infty$. Analog lässt sich auch das Infimum von Teilmengen von $\overline{\mathbb{R}}$ kennzeichnen. Wir halten also fest, dass jede Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ ein Supremum und ein Infimum (bzgl. der geordneten Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$) besitzt.

Nach Definition 2.4.1 und Satz 2.4.1 sind Limes superior, Limes inferior und Grenzwert einer reellen Zahlenfolge Suprema und Infima gewisser Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wir nehmen nun diese Suprema und Infima bzgl. der geordneten Menge $(\overline{\mathbb{R}}, \leq)$. Es folgt, dass Limes superior und Limes inferior dann für jede reelle Zahlenfolge (und sogar für jede Folge nach $\overline{\mathbb{R}}$) existieren, möglicherweise aber den Wert ∞ oder $-\infty$ haben. Gilt für eine reelle Zahlenfolge (a_n), dass $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$ (und damit auch $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$), so schreiben wir auch $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und nennen (a_n) *bestimmt divergent* gegen ∞. Analog definiert man bestimmte Divergenz gegen $-\infty$. Man bezeichnet ∞ und $-\infty$ auch als *uneigentliche Grenzwerte*.

Beispiel 1. Sei $a_n = n$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, denn mit $A_n := \{a_k : k \geq n\}$ ist $\inf_{\overline{\mathbb{R}}} A_n = \inf_{\mathbb{R}} A_n = n$ und folglich $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}\{\inf_{\overline{\mathbb{R}}} A_n : n \in \mathbb{N}\} = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} \mathbb{N} = \infty$.

Beispiel 2. Sei $a_n = (-1)^n$. Dann ist $A_n := \{-1, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, dass $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

2.5 Die allgemeine Potenz

In Definition 1.7.1 hatten wir die Potenz a^r für $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{Q}$ erklärt. Wir wollen dies jetzt für $r \in \mathbb{R}$ tun. Eine Möglichkeit dafür wurde bereits im Anschluss an Satz 1.7.6 angegeben, aber wir beschreiten jetzt einen anderen Weg.

Hilfssatz 2.5.1 *Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \to 0$ und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt $a^{r_n} \to 1$.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $a > 1$ annehmen. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.Wegen $a^{1/k} \to 1$ für $k \to \infty$ (vgl. Beispiel nach Satz 2.2.5) existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|a^{1/k} - 1| < \varepsilon$ und $|a^{-1/k} - 1| = |\left(\frac{1}{a}\right)^{1/k} - 1| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Weiter existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|r_n| < \frac{1}{K}$ für $n \geq N$. Es folgt $-\varepsilon < a^{-1/K} - 1 < a^{r_n} - 1 < a^{1/K} - 1 < \varepsilon$, also $|a^{r_n} - 1| < \varepsilon$, für $n \geq N$. $\square$

Hilfssatz 2.5.2 *Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen und sei $a \in \mathbb{R}_+$. Konvergiert (r_n), so konvergiert auch (a^{r_n}). Dabei hängt $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ nur von $r := \lim_{n\to\infty} r_n$ ab und es gilt $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r$ falls $r \in \mathbb{Q}$*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man wieder $a > 1$ annehmen. Sei (s_n) eine monoton fallende Folge mit $s_n \to r$. (Die Existenz einer solchen Folge kann man aus Satz 1.7.4 ableiten, welcher besagt, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist.) Sei $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq r$. Dann gilt $s_n \geq r \geq m$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a^{s_n} \geq a^m$ nach Satz 1.7.6. Folglich ist (a^{s_n}) nach unten beschränkt. Außerdem ist (a^{s_n}) nach Satz 1.7.6 monoton fallend, und damit nach Satz 2.3.1 konvergent.

Sei nun (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit $r_n \to r$. Dann gilt $r_n - s_n \to 0$, nach Hilfssatz 2.5.1 also $a^{r_n - s_n} \to 1$. Wegen $a^{r_n} = a^{s_n + r_n - s_n} = a^{s_n} a^{r_n - s_n}$ ist dann auch (a^{r_n}) konvergent und hat den gleichen Grenzwert wie (a^{s_n}).

Ist $r \in \mathbb{Q}$, so kann man $s_n = r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen, und damit ist a^r der gemeinsame Grenzwert von (a^{r_n}) und (a^{s_n}). $\square$

Definition 2.5.1 *Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir $a^r := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$, wobei (r_n) eine rationale Zahlenfolge mit $r_n \to r$ ist.*

Hilfssatz 2.5.2 zeigt, dass a^r wohldefiniert ist (und im Beweis wurde bemerkt, dass eine Folge (r_n) mit den gewünschten Eigenschaften für jedes $r \in \mathbb{R}$ existiert).

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass die in Satz 1.7.6 formulierten Potenzgesetze auch für reelle Exponenten richtig bleiben. Ebenso bleiben auch die Behauptungen der obigen Hilfssätze richtig, wenn man $r_n, r \in \mathbb{R}$ zulässt.

2.6 Reihen

Definition 2.6.1 Sei $N \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\geq N}$ Zahlenfolge. Die durch $s_n := \sum_{k=N}^n a_k$ definierte Folge $(s_n)_{n\geq N}$ heißt die zu (a_n) gehörige *(unendliche) Reihe*. Sie wird mit $\sum_{n=N}^\infty a_n$ oder auch $\sum a_n$ bezeichnet. Die Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge (s_n) konvergiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert von (s_n) die *Summe* der Reihe $\sum a_n$. Gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so schreibt man $\sum_{n=N}^\infty a_n = s$.

Reihen, die nicht konvergieren, heißen *divergent* (und bei Existenz des uneigentlichen Grenzwertes ∞ oder $-\infty$ auch *bestimmt divergent*). Die Folge (s_n) heißt auch *Folge der Partialsummen* (oder *Teilsummen*) der Reihe $\sum a_n$.

Wir bezeichnen mit $\sum_{n=N}^\infty a_n$ bzw. $\sum a_n$ also sowohl die Reihe selbst, wie auch – im Konvergenzfall – ihre Summe. Das sollte im allgemeinen aber nicht zu Verwechslungen führen.

Beispiel. Sei $q \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=0}^\infty q^n$. Es ist also $a_n = q^n$. Diese Reihe heißt *geometrische Reihe*.

Fall 1. $q = 1$. Dann gilt $a_n = 1$ und $s_n = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$. Die Reihe ist (bestimmt) divergent.

Fall 2. $q \neq 1$. Es gilt $s_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, denn

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^n q^k &= \sum_{k=0}^n (1-q)q^k \\ &= \sum_{k=0}^n q^k - q^{k+1} \\ &= 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \cdots + q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1}.\end{aligned}$$

Wegen $q^{n+1} \to 0$ für $|q| < 1$ folgt, dass

$$\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad |q| < 1,$$

d. h., die Reihe konvergiert für $|q| < 1$ und ihre Summe ist $\frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Da Reihen nach Definition also nichts anderes als Folgen sind, haben Sätze über Folgen Analoga für Reihen. Aus Satz 2.2.1, (i), erhält man z. B., dass aus der Konvergenz von $\sum a_n$ und $\sum b_n$ die von $\sum(a_n + b_n)$ folgt, und dass für die Summen $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ gilt. Analog überträgt sich Satz 2.2.1, (iii).

Satz 2.6.1 *Sei $\sum a_n$ eine Reihe nichtnegativer reeller Zahlen, d. h., es gelte $a_n \geq 0$ für alle n. Dann konvergiert $\sum a_n$ genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" folgt aus Satz 2.1.2 ("Konvergente Folgen sind beschränkt"), und "$\Leftarrow$" folgt aus Satz 2.3.1, da die Folge der Partialsummen wegen $a_n \geq 0$ monoton steigend ist. $\square$

Satz 2.6.2 (Cauchyscher Verdichtungssatz) *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_k$ genau dann, wenn $\sum_{k=0}^\infty 2^k a_{2^k}$ konvergiert.*

Beweis. Mit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ist

$$\begin{aligned}s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + \cdots + a_{2^{n+1}-1} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_2 + a_4 + a_4 + a_4 + a_4 + a_8 + a_8 + \cdots + a_{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + a_4 + a_5 + a_5 + \cdots + a_{2^n} \\ &= 2s_{2^n} - a_1 \\ &\leq 2s_{2^n}.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt mit Satz 2.6.1. $\square$

Beispiel. Sei $\alpha > 0$ und $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 2.6.2 erfüllt und damit ist $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergent, wenn

$$\sum_{k=0}^\infty 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^\infty 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=0}^\infty \left(2^{1-\alpha}\right)^k$$

konvergiert. Dies ist aber die geometrische Reihe, und diese konvergiert genau dann, wenn $2^{1-\alpha} < 1$, also wenn $\alpha > 1$ gilt.

Insgesamt konvergiert also $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$, und divergiert für $0 < \alpha \leq 1$. Insbesondere divergiert die sogenannte *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$.

Satz 2.6.3 (Leibnizkriterium) *Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} a_k$. Für die Folge (s_n) der Partialsummen gilt dabei*

$$s_{2n} \leq \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} a_k \leq s_{2n-1}$$

für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es ist $s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+2}a_{2n+1} + (-1)^{2n+1}a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0$ für $n \in \mathbb{N}$, also ist (s_{2n-1}) monoton fallend. Analog ist (s_{2n}) monoton steigend. Außerdem gilt $s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1}a_{2n} = -a_{2n} < 0$ und damit $s_2 \leq s_{2n} < s_{2n-1} \leq s_1$.

Nach Satz 2.3.1 konvergieren damit die Folgen (s_{2n-1}) und (s_{2n}), und wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = -a_{2n} \to 0$ haben sie den gleichen Grenzwert. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ ist konvergent. Für die Summe s gilt $s_2 = \frac{1}{2} \leq s \leq 1 = s_1$. (Tatsächlich gilt $e^s = 2$, und es ist $s = 0,6931471806\ldots$.)

Satz 2.6.4 (Cauchykriterium für Reihen) *Eine Reihe $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq K$ existiert, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n > m \geq N$ die Ungleichung $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ gilt, d. h., falls*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \geq K \forall m, n \in \mathbb{N} : n > m \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Beweis. Wegen $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ folgt die Behauptung aus Satz 2.3.5. □

Satz 2.6.5 *Konvergiert $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$, so gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.*

Beweis. Man wähle $n = m + 1$ im Cauchykriterium. □

Die harmonische Reihe zeigt, dass in Satz 2.6.5 nicht die Umkehrung gilt.

2.7 Absolute und bedingte Konvergenz

Definition 2.7.1 Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum |a_n|$ konvergiert.

Satz 2.7.1 *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

Der *Beweis* folgt wegen $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$ unmittelbar aus dem Cauchykriterium. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht. So ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Wir betrachten dieses Beispiel genauer:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
s & = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\ldots \\
\frac{s}{2} & = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & +\ldots \\
\hline
\frac{3s}{2} & = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +\ldots
\end{array}$$

Es zeigt sich, dass in der Reihe für $\frac{3s}{2}$ dieselben Folgenglieder auftreten wie in der Reihe für s, aber in anderer Reihenfolge.

Definition 2.7.2 Sei $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Eine Reihe heißt *unbedingt konvergent*, wenn jede ihrer Umordnungen konvergiert, und zwar zur selben Summe. Eine konvergente, aber nicht unbedingt konvergente Reihe heißt *bedingt konvergent.*

Satz 2.7.2 *Absolut konvergente Reihen sind unbedingt konvergent.*

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung.

Beweis von Satz 2.7.2. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergente Reihe und sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)}$ eine Umordnung der Reihe. Sei $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und sei $t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\nu(k)}$. Dann ist (s_n) konvergent, und wir müssen zeigen, dass (t_n) ebenfalls konvergent ist und denselben Grenzwert hat. Dazu reicht es zu zeigen, dass $t_n - s_n \to 0$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$.Wegen der absoluten Konvergenz und aufgrund des Cauchykriteriums existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$ für $n > m \geq N$. Weiter existiert $M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$ und $\nu(\{1, 2, \ldots, M\}) \supset \{1, 2, \ldots, N\}$. Für $n \geq M$ folgt dann

$$\begin{aligned}
|t_n - s_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\nu(k)} - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \\
&= \left|\sum_{k\in\nu(\{1,2,\ldots,n\})} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \\
&= \left|\sum_{k\in\nu(\{1,2,\ldots,n\})\setminus\{1,2,\ldots,N\}} a_k - \sum_{k=N+1}^{n} a_k\right| \\
&\leq \sum_{k=N+1}^{\max\nu(\{1,2,\ldots,n\})} |a_k| \\
&< \varepsilon. \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 2.7.3 *Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen mit Summen a und b. Dann ist die aus allen Produkten $a_j b_k$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, gebildete Reihe absolut konvergent und ihre Summe ist ab.*

Eine etwas formalere Fassung der Behauptung des Satzes ist folgende: ist $\phi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Bijektion und ist $p_n := a_j b_k$ falls $\phi(n) = (j, k)$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ konvergent mit $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ab$.

Beweis von Satz 2.7.3. Seien ϕ und p_n wie oben, mit $\phi(n) = (\phi_1(n), \phi_2(n))$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $i \in \{1, 2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $M_{i,n} := \max \phi_i(\{1, 2, \ldots, n\})$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n} |p_\ell| &= \sum_{\ell=0}^{n} |a_{\phi_1(\ell)}||b_{\phi_2(\ell)}| \\ &\le \sum_{j=0}^{M_{1,n}} \sum_{k=0}^{M_{2,n}} |a_j||b_k| \\ &= \left(\sum_{j=0}^{M_{1,n}} |a_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{M_{2,n}} |b_k|\right) \\ &\le \left(\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\right).\end{aligned}$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} |p_n|$ nach Satz 2.7.1.

Es reicht nun, $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = ab$ für eine Summationsreihenfolge (d. h., für eine Funktion ϕ) zu zeigen. Dazu betrachten wir die im folgenden Diagramm angedeutete Summationsreihenfolge:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_0b_0 & \rightarrow & a_0b_1 & & a_0b_2 & \rightarrow & a_0b_3 & & a_0b4 \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
a_1b_0 & \leftarrow & a_1b_1 & & a_1b_2 & & a_1b_3 & & a_1b_4 \\
\downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
a_2b_0 & \rightarrow & a_2b_1 & \rightarrow & a_2b_2 & & a_2b_3 & & a_2b_4 \\
 & & & & & & \downarrow & & \uparrow \\
a_3b_0 & \leftarrow & a_3b_1 & \leftarrow & a_3b_2 & \leftarrow & a_3b_3 & & a_3b_4 \\
\downarrow & & & & & & & & \uparrow \\
a_4b_0 & \rightarrow & a_4b_1 & \rightarrow & a_4b_2 & \rightarrow & a_4b_3 & \rightarrow & a_4b_4
\end{array}$$

Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} p_k = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \to ab$$

und damit $\sum_{k=0}^{n} p_k \to ab$. $\square$

Eine andere wichtige Summationsreihenfolge wird durch die folgende Definition gegeben.

Definition 2.7.3 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *Cauchyprodukt* der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$.

Nach Satz 2.7.3 ist das Cauchyprodukt zweier absolut konvergenter Reihen ebenfalls absolut konvergent. Darüberhinaus kann man zeigen, daß das Cauchyprodukt auch dann konvergiert, und zwar zur "richtigen" Summe, wenn nur eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergiert und die andere nur im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

2.8 Kriterien für absolute Konvergenz

Satz 2.8.1 (Vergleichskriterium) *Seien $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ Reihen.*

(i) *Existiert $M \ge N$ mit $|a_n| \le b_n$ für $n \ge M$ und ist $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Existiert $M \ge N$ mit $0 \le b_n \le a_n$ für $n \ge M$ und ist $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$ divergent, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.*

In (i) kann a_n komplex sein, in (ii) muss a_n reell sein. Sowohl in (i) wie in (ii) ist b_n reell. Man nennt (i) *Majorantenkriterium* und (ii) *Minorantenkriterium.*

Beweis. (i). Mit $s_n = \sum_{k=M}^{n} |a_n|$ und $t_n = \sum_{k=M}^{n} b_n$ ist $s_n \le t_n$ für $n \ge M$. Konvergiert $\sum_{n=N}^{\infty} b_n$, so ist auch $(t_n)_{k\ge M}$ konvergent und folglich beschränkt. Damit ist $(s_n)_{k\ge M}$ beschränkt, also konvergent, und damit auch $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Der Beweis von (ii) ist analog. $\square$

Beispiel. Sei

$$a_n := \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{|3+4i|}{5}\right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\left(\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{5}\right)^n = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \le \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergiert, ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Satz 2.8.2 (Wurzelkriterium) *Sei $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ Reihe.*

(i) *Existiert $q \in [0, 1)$ und $M \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für $n \ge M$, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

(ii) *Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ für unendlich viele n, so ist $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ divergent.*

Bemerkung. Die Voraussetzung in (i) ist äquivalent zu $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, und die Voraussetzung in (ii) ist erfüllt, falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Beweis von Satz 2.8.2. (i). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ folgt $|a_n| \le q^n$, und damit folgt die Behauptung aus dem Vergleichskriterium, da die geometrische Reihe $\sum q^n$ für $0 \le q < 1$ konvergiert.

(ii). Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ folgt $|a_n| \ge 1$. Gilt dies für unendlich viele n, so ist (a_n) keine Nullfolge, und damit die Reihe $\sum a_n$ divergent nach Satz 2.6.5. $\square$

Beispiel. Sei

$$a_n := \left(\frac{in}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\left|\frac{in}{n+1}\right|^{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \to \frac{1}{e}.$$

Wegen $\frac{1}{e} < 1$ folgt, dass $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist.

Satz 2.8.3 (Quotientenkriterium) *Sei* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *Reihe.*

(i) *Existiert* $q \in [0,1)$ *und* $M \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ *für* $n \geq M$, *so ist* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

(ii) *Existiert* $M \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n \neq 0$ *und* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *für* $n \geq M$, *so ist* $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *divergent.*

Bemerkung. Es gelte $a_n \neq 0$ für $n \geq M$. Die Voraussetzung in (i) ist dann äquivalent zu $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, und die Voraussetzung in (ii) ist erfüllt, falls $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

Beweis von Satz 2.8.3. (i). Es ist $|a_n| \leq q|a_{n-1}| \leq q^2|a_{n-2}| \leq \cdots \leq q^{n-M}|a_M| = q^n q^{-M}|a_M|$ für $n \geq M$. Die Behauptung folgt aus dem Vergleichskriterium.

(ii) Analog zu (i) folgt $|a_n| \geq |a_M|$ für $n \geq M$. Damit ist (a_n) keine Nullfolge, also $\sum a_n$ divergent.

Beispiel. Sei

$$a_n := \frac{7^n}{\binom{3n}{n}} = \frac{7^n(2n)!n!}{(3n)!}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{7^{n+1}(2n+2)!(n+1)!}{(3n+3)!}\frac{(3n)!}{7^n(2n)!n!} \\
&= \frac{7\cdot 7^n(2n+2)(2n+1)(2n)!(n+1)n!}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}\frac{(3n)!}{7^n(2n)!n!} \\
&= \frac{7(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{7(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \\
&= \frac{7\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(3+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n}\right)} \\
&\to \frac{7\cdot 2\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 3\cdot 3} \\
&= \frac{28}{27}.
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{28}{27} > 1$ divergiert die Reihe $\sum a_n$.

2.9 Potenzreihen

Definition 2.9.1 Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, mit $z, z_0 \in \mathbb{C}$ und einer Folge (a_n) komplexer Zahlen, heißt *Potenzreihe.*

Ist z_0 und (a_n) gegeben, so stellt sich die Frage, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe konvergiert. Dies wird weitgehend durch den folgenden Satz geklärt.

Satz 2.9.1 *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *Potenzreihe. Es sei* $\ell := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *und* $r := \frac{1}{\ell}$ *falls* $\ell \in \mathbb{R}_+$, $r := 0$ *falls* $\ell = \infty$ *und* $r := \infty$ *falls* $\ell = 0$. *Dann konvergiert die Potenzreihe absolut falls* $|z-z_0| < r$ *und sie divergiert falls* $|z-z_0| > r$

Beweis. Sei $b_n := a_n(z-z_0)^n$. Dann ist $\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|}|z-z_0|$. Hieraus ergibt sich $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \ell|z-z_0|$. Die Behauptung folgt jetzt aus dem Wurzelkriterium. □

Bemerkung 1. Ist $0 < r < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe innerhalb eines Kreises vom Radius r um z_0, und sie divergiert außerhalb dieses Kreises. Daher nennt man das in Satz 2.9.1 definierte r den *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Bemerkung 2. Satz 2.9.1 macht keine Aussage für den Fall, dass $|z-z_0| = r$. Hier ist in der Tat "alles möglich", wie die folgenden Beispiele belegen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, also $z_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0 = 0$. Es gilt $\ell = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ und damit $r = 1$. Damit liegt (absolute) Konvergenz für $|z| < 1$ und Divergenz für $|z| > 1$ vor. Für $z = 1$ liegt Divergenz vor, für $z = -1$ Konvergenz.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$. Wieder gilt $r = 1$, aber diesmal liegt Konvergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ vor.

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$. Wieder gilt $r = 1$, aber jetzt liegt Divergenz für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ vor.

Satz 2.9.2 *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *Potenzreihe mit Konvergenzradius* r. *Existiert der (möglicherweise uneigentliche) Grenzwert* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, *so gilt* $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Der *Beweis* ist analog zum Beweis von Satz 2.9.1, wobei man statt des Wurzelkriteriums aber jetzt das Quotientenkriterium verwendet.

Beispiel. Sei $a_n := \frac{1}{n!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Es folgt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Ein Nebenergebnis ist, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Definition 2.9.2 Die durch $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ definierte Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *Exponentialfunktion.*

Gemäß obigem Beispiel konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$. Statt $\exp(z)$ schreibt man auch $\exp z$.

Satz 2.9.3 *Für* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\exp(z)\cdot\exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}w^n\right)\\
&\overset{\text{Cauchy-Prod.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k\frac{1}{(n-k)!}w^{n-k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k w^{n-k}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n\\
&= \exp(z+w). \quad \square
\end{aligned}$$

Folgerung 2.9.1 *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:*

(i) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$, *insbesondere also* $\exp z \neq 0$.

(ii) $\exp(nz) = (\exp z)^n$.

Man erhält hier (i) wegen $\exp(-z)\exp z = \exp(-z+z) = \exp(0) = 1$, und auch (ii) folgt leicht.

Satz 2.9.4 *Für $z \in \mathbb{C}$ gilt* $\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \to 0$$

für $n \to \infty$. Nun gilt für $n \geq 2$, dass

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}z^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k\right|\\
&= \left|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right)z^k\right|\\
&\leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{n^k}\right)|z|^k\\
&\leq \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^k\right)|z|^k\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^k\right)|z|^k\\
&\overset{\text{Bernoulli}}{\leq} \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-k\frac{k-1}{n}\right)\right)|z|^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{n}|z|^k\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}|z|^k\\
&= \frac{1}{n}|z|^2\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{j!}|z|^j\\
&\leq \frac{1}{n}|z|^2\exp|z|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

Abbildung 3 zeigt den Graphen (der auf ein Intervall eingeschränkten) Exponentialfunktion sowie die Graphen von $x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k$ und $x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für $n=3$. (Statt $\exp|\mathbb{R}$ schreiben wir nur exp und nennen auch die eingeschränkte Funktion wieder Exponentialfunktion. Eine entsprechende Konvention wird auch für in späteren Abschnitten eingeführte Funktionen wie Sinus und Cosinus gelten.)

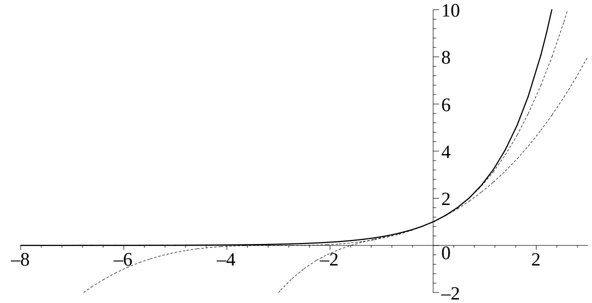

Abbildung 3: Die Exponentialfunktion und approximierende Polynome.

Folgerung 2.9.2 $\exp 1 = e$.

Dabei ist $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718\ldots$ die in §2.3 definierte Eulersche Zahl.

Satz 2.9.5 *Für $x \in \mathbb{R}$ gilt* $\exp x = e^x$.

Aufgrund dieses Satzes setzt man $e^z := \exp z$ für $z \in \mathbb{C}$.

Beweis von Satz 2.9.5. Für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ist $\left(\exp\frac{1}{q}\right)^q = \exp\left(q\frac{1}{q}\right) = \exp 1 = e$, also $\exp\frac{1}{q} = e^{1/q}$ und damit $\exp\frac{p}{q} = \left(\exp\frac{1}{q}\right)^p = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}$. Daraus folgt die Behauptung für alle $r \in \mathbb{Q}$. Ist nun $r \in \mathbb{R}$, so wähle man eine Folge (r_n) rationaler Zahlen mit $r_n \to r$. Es gilt dann nach Definition von e^r, dass $e^{r_n} \to e^r$. Ähnlich kann man (und werden wir später) zeigen, dass auch $\exp r_n \to \exp r$ gilt. Hieraus folgt dann die Behauptung. Wir verzichten jetzt auf die Details.

Satz 2.9.6 *e ist irrational.*

Beweis. Wir nehmen an, dass e rational ist, etwa $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(q-1)!p = q!e = q!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{q!}{k!} = \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!},$$

also

$$S := \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{q!}{k!} = (q-1)!p - \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}.$$

Dies steht im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \\ &< \frac{1}{q+1} + \left(\frac{1}{q+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{q+1}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{q+1}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q+1}\right)^j \\ &= \frac{1}{q+1}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} \\ &= \frac{1}{q} \\ &\le 1. \quad \square \end{aligned}$$

3 Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1.1 Seien $M, N \subset \mathbb{C}$ und sei $f : M \to N$ eine Funktion. Sei $\xi \in M$. Dann heißt f *stetig (englisch: continuous) in* ξ, falls für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$ gilt, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Für $A \subset M$ heißt f stetig in A, falls f stetig in jedem Punkt von A ist. Schließlich heißt f stetig, wenn f stetig in M ist.

Es genügt natürlich im folgenden, den Fall $N = \mathbb{C}$ zu betrachten.

Aus den Sätzen aus §2.2 erhält man unmittelbar die folgenden Regeln:

- Sind $f, g : M \to \mathbb{C}$ stetig (in $\xi \in M$), so sind auch $f + g$, $f \cdot g$ und mit $c \in \mathbb{C}$ auch $c \cdot f$ stetig (in ξ). Falls $g(\xi) \neq 0$, so ist auch (die in $M \backslash g^{-1}(0)$ definierte) Funktion $\frac{f}{g}$ stetig in ξ.
- f ist stetig (in ξ) genau dann, wenn $\mathrm{Re}\, f$ und $\mathrm{Im}\, f$ stetig (in ξ) sind.
- Die durch $z \mapsto |z|$ und $z \mapsto \overline{z}$ definierten Funktionen sind stetig.

In §2.5 wurde gezeigt, dass für $a \in \mathbb{R}_+$ die durch $x \to a^x$ definierte Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}_+$ stetig ist.

Offensichtlich ist für $M \subset \mathbb{C}$ auch die Funktion id_M stetig.

Satz 3.1.1 *Seien $M, N, P, Q \subset \mathbb{C}$ mit $N \subset P$ und seien $g : M \to N$ stetig (in $\xi \in M$) und $f : P \to Q$ stetig (in $g(\xi) \in g(M) \subset N \subset P$). Dann ist $f \circ g$ stetig (in ξ).*

Beweis. Sei (x_n) Folge in M mit $x_n \to \xi$. Da g stetig, folgt $g(x_n) \to g(\xi)$. Nun ist aber $(g(x_n))$ Folge in P und damit folgt aus der Stetigkeit von f in $g(\xi)$, dass $f(g(x_n)) \to f(g(\xi))$, also $(f \circ g)(x_n) \to (f \circ g)(\xi)$. $\square$

Beispiele. 1. Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z^2 + \overline{z}|$ ist stetig. Denn die Funktionen $f_1 := id_{\mathbb{C}}$, $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_2(z) = \overline{z}$, und $f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_3(z) = |z|$, sind alle stetig und damit auch $f_1 \cdot f_1$, $f_1 \cdot f_1 + f_2$ und $f = f_3 \circ (f_1 \cdot f_1 + f_2)$.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3|x^4 - 7|}{(e^x - 9x)^2 + 11},$$

ist stetig, da sie durch Verknüpfungen wie $+, \cdot, \circ, \dots$ aus stetigen Funktionen aufgebaut ist. (Man beachte, dass der Nenner keine Nullstellen hat.)

3. Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f stetig. Denn ist $\xi \in \mathbb{Z}$ und (x_n) Folge in $\mathbb{Z}$ mit $x_n \to \xi$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \frac{1}{2}$ für $n \ge N$. Es folgt $x_n = \xi$ und damit $f(x_n) = f(\xi)$ für $n \ge N$, also $f(x_n) \to \xi$.

Analog sieht man, dass Zahlenfolgen (also Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$) stetig sind.

4. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational,} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x \text{ rational, mit } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Behauptung. Die Funktion f ist stetig in irrationalen und unstetig in rationalen Zahlen.

Beweis. Sei $\xi \in \mathbb{Q}$. Dann ist durch $x_n = \xi + \frac{\sqrt{2}}{n}$ eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$ mit $x_n \to \xi$ gegeben. Es gilt dann $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f(x_n) \to 0$, wegen $f(\xi) \neq 0$ also $f(x_n) \not\to f(\xi)$.

Sei nun $\xi \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$ und sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$ mit $x_n \to \xi$. Zu zeigen ist, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Für $q \in \mathbb{N}$ sei $\delta_q := \min_{p \in \mathbb{N}} \left|\xi - \frac{p}{q}\right|$. Dann gilt $\delta_q > 0$ für alle $q \in \mathbb{N}$ und damit folgt $\delta := \min_{q \le \frac{1}{\varepsilon}} \delta_q > 0$. Nach Wahl von δ gilt für $x \in \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{Q}$ mit $|x - \xi| < \delta$, dass aus $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd $q > \frac{1}{\varepsilon}$ und damit $|f(x)| = \frac{1}{q} < \varepsilon$ folgt. Außerdem gilt natürlich $|f(x)| = 0 < \varepsilon$ für $x \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q}$ und damit insgesamt $|f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ mit $|x - \xi| < \delta$. Nun existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für $n \ge N$. Es folgt $|f(x_n)| < \varepsilon$ für $n \ge N$, also $f(x_n) \to 0 = f(\xi)$. $\square$

Satz 3.1.2 *Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für jedes $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$ ist.*

In Quantorenschreibweise lautet die hier angegebene, zur Stetigkeit in ξ äquivalente, Bedingung wie folgt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x \in M : |x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Man nimmt diese Bedingung oft auch zur Definition der Stetigkeit.

Beweis von Satz 3.1.2. "$\Leftarrow$". Die "ε-δ-Bedingung" sei erfüllt und es sei (x_n) Folge in M mit $x_n \to \xi$. Zu zeigen ist, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass für alle $x \in M$

$$|x - \xi| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

gilt. Wegen $x_n \to \xi$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für $n \geq N$. Es folgt $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$ für $n \geq N$.

"$\Rightarrow$". Wir zeigen die Kontraposition und nehmen an, dass die "ε-δ-Bedingung" nicht erfüllt ist. Dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \delta \in \mathbb{R}_+ \exists x \in M : |x - \xi| < \delta \wedge |f(x) - f(\xi)| \geq \varepsilon.$$

Insbesondere existiert dann zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in M$ mit $|x_n - \xi| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(\xi)| \geq \varepsilon$. Es folgt $x_n \to \xi$ und $f(x_n) \not\to f(\xi)$. Damit ist f nicht stetig in ξ. $\square$

3.2 Der Zwischenwertsatz

Satz 3.2.1 (Zwischenwertsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $\eta \in \mathbb{R}$ ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d. h., es gilt entweder $f(a) < \eta < f(b)$ oder $f(b) < \eta < f(a)$. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \eta$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f(a) < \eta < f(b)$. Es sei $M := \{t \in [a, b] : f(t) \leq \eta\}$. Dann ist $M \neq \emptyset$ wegen $a \in M$. Außerdem ist M durch b nach oben beschränkt und damit existiert $\xi := \sup M$. Nun existiert eine Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$. Da f stetig, folgt $f(x_n) \to f(\xi)$. Wegen $f(x_n) \leq \eta$ ergibt sich $f(\xi) \leq \eta$, also $\xi \in M$. Wegen $b \notin M$ existiert auch eine Folge (y_n) in $(\xi, b] \supset [a, b] \backslash M$ mit $y_n \to \xi$, etwa $y_n := \xi + \frac{b-\xi}{n}$. Es folgt $f(y_n) \to f(\xi)$, wegen $f(y_n) > \eta$ also $f(\xi) \geq \eta$. Insgesamt ergibt sich $f(\xi) = \eta$. $\square$

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x + x$, hat eine Nullstelle in $(-1, 0)$, d. h., es existiert $\xi \in (-1, 0)$ mit $f(\xi) = 0$. Denn f ist stetig in $\mathbb{R} \supset [-1, 0]$ und $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ und $f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$.

Eine andere Formulierung von Satz 3.2.1 ist die folgende: ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$ falls $f(a) < f(b)$ und $[f(b), f(a)] \subset f([a, b])$ falls $f(b) < f(a)$.

Satz 3.2.2 *Sei I Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und nicht konstant. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

Ist f konstant, so besteht $f(I)$ aus einem Punkt. Wir haben konstante Funktionen in Satz 3.2.2 ausgeschlossen, da wir einpunktige Mengen nicht als Intervalle betrachtet haben.

Beweis von Satz 3.2.2. Sei $\alpha := \inf f(I)$ und $\beta := \sup f(I)$ (wobei die Werte $\pm\infty$ zugelassen sind). Dann gilt $\alpha < \beta$, da f nicht konstant. Wir zeigen, dass $(\alpha, \beta) \subset f(I)$. Sei dazu $\eta \in (\alpha, \beta)$, also $\alpha < \eta < \beta$. Dann existieren $a, b \in I$ mit $\alpha \leq f(a) < \eta < f(b) \leq \beta$. (Es muss nicht $a < b$ gelten.) Nach Zwischenwertsatz existiert $\xi \in I$ mit $f(\xi) = \eta$. Es folgt $\eta \in f(I)$, also $(\alpha, \beta) \subset f(I)$.

Da aber für $\eta > \beta$ und $\eta < \alpha$ sicher $\eta \notin f(I)$ gilt, ergibt sich, dass $f(I)$ eines der vier Intervalle (α, β), $[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$ und $[\alpha, \beta]$ ist. $\square$

Beispiel. Für $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, gilt $f((-1, 1)) = [0, 1)$.

Satz 3.2.3 *Seien I, J Intervalle und sei $f : I \to J$ stetig und surjektiv. Ist f streng monoton steigend (bzw. fallend), so ist f bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ ist ebenfalls stetig und streng monoton steigend (bzw. fallend).*

Beweis. Zunächst folgt aus der strengen Monotonie von f die Injektivität und damit die Bijektivität von f. Desweiteren sieht man unmittelbar, dass f^{-1} ebenfalls streng monoton ist.

Wir zeigen jetzt, dass f^{-1} stetig ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f streng monoton steigend. Sei $\eta \in J = f(I)$ und $\xi := f^{-1}(\eta)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ξ kein "Randpunkt" von I ist. Dann existiert $r > 0$ mit $[\xi - r, \xi + r] \subset I$. Sei nun $0 < \varepsilon \leq r$. Wir setzen $\delta := \min\{f(\xi + \varepsilon) - \eta, \eta - f(\xi - \varepsilon)\}$. Für $y \in J$ mit $|y - \eta| < \delta$ gilt dann

$$f(\xi - \varepsilon) \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq f(\xi + \varepsilon)$$

und damit wegen der strengen Monotonie $\xi - \varepsilon < f^{-1}(y) < \xi + \varepsilon$, also $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| < \varepsilon$. Damit ist f^{-1} stetig in η.

Den Fall, dass ξ Randpunkt von I ist, kann man ähnlich behandeln. Ist etwa $I = [\xi, b]$, so wählt man $\delta := f(\xi + \varepsilon) - \eta$ für $0 < \varepsilon \leq b - \xi$. Wir verzichten auf die Details. $\square$

Beispiel. Es sei $a > 1$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto a^x$. Dann ist f streng monoton steigend, stetig und bijektiv. Damit existiert die Umkehrfunktion und sie ist ebenfalls stetig und streng monoton steigend. Sie heißt *Logarithmus zur Basis a* und wird mit $\log_a$ bezeichnet. Im Falle $a = e$ nennen wir sie *natürlicher Logarithmus* oder einfach *Logarithmus* und schreiben $\log x$ oder $\ln x$ statt $\log_e x$. Der Fall $0 < a < 1$ ist analog. Hier sind f und f^{-1} streng monoton fallend.

Für $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ gilt also $a^{\log_a b} = b$ und $e^{\ln c} = c$. Für $u \in \mathbb{R}_+$ und $v \in \mathbb{R}$ ist damit

$$u^v = \left(e^{\ln u}\right)^v = e^{v \cdot \ln u} = \exp(v \cdot \ln u).$$

Dies zeigt einerseits, dass für $a > 0$ die durch $x \mapsto x^a$ definierte Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig ist. Zum anderen legt es für $a \in \mathbb{R}_+$ und $z \in \mathbb{C}$ die Definition $a^z := \exp(z \cdot \ln a)$ nahe. Die durch $z \mapsto a^z$ definierte Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ ist dann ebenfalls stetig.

3.3 Grenzwerte von Funktionen

Definition 3.3.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $\xi \in \mathbb{C}$. Dann heißt ξ *Häufungspunkt* von M, falls eine Folge (x_n) in $M \backslash \{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$ existiert.

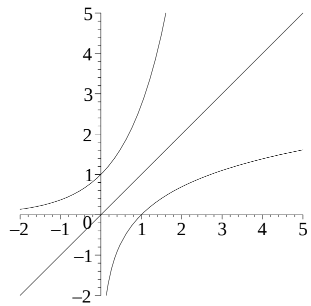

Abbildung 4: Die Graphen von exp, ln und $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

In obiger Definition ist sowohl $\xi \in M$ wie auch $\xi \notin M$ zugelassen.

Der Begriff des Häufungspunktes (einer Menge) sollte nicht mit dem Begriff des Häufungswerts (einer Folge) verwechselt werden.

Definition 3.3.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M und $f : M \to \mathbb{C}$ Funktion. Wir sagen, dass *$f(x)$ für $x \to \xi$ konvergiert*, falls $\eta \in \mathbb{C}$ existiert, so dass für jede Folge (x_n) in $M\backslash\{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$ auch $f(x_n) \to \eta$ gilt. Dieses η heißt dann *Grenzwert* von f für $x \to \xi$ und wird mit $\lim_{x\to\xi} f(x)$ bezeichnet.

Ist in obiger Definition $M \subset \mathbb{R}$ oder $f : M \to \mathbb{R}$, so können wir auch uneigentliche Grenzwerte zulassen, d. h., es kann $\xi = \pm\infty$ oder $\eta = \pm\infty$ sein.

Satz 3.3.1 *Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $\xi \in M$. Weiter sei ξ Häufungspunkt von M und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann ist f stetig in ξ genau dann, wenn $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.*

Hierbei bedeutet $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ natürlich wieder, dass der Grenzwert existiert *und* den Wert $f(\xi)$ hat.

Falls $\xi \in M$ gilt, aber ξ kein Häufungspunkt von M ist, so ist jede Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ stetig in ξ (denn für jede Folge (x_n) in M mit $x_n \to \xi$ existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = \xi$ falls $n \geq N$).

Beweis von Satz 3.3.1. "$\Leftarrow$". Sei (x_n) eine Folge in M mit $x_n \to \xi$. Zu zeigen ist, dass $f(x_n) \to f(\xi)$. Dies ist trivial, falls ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n = \xi$ für $n \geq N$ existiert. Andernfalls sei (x_{n_k}) die Teilfolge aller x_n mit $x_n \neq \xi$. Dann ist (x_{n_k}) Folge in $M\backslash\{\xi\}$. Nach Voraussetzung gilt also $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert $K \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_{n_k}) - f(\xi)| < \varepsilon$ für $k \geq K$. Sei jetzt $n \geq n_K$. Existiert dann $k \in \mathbb{N}$ mit $n = n_k$, so gilt $k \geq K$ und damit $|f(x_n) - f(\xi)| < \varepsilon$. Ist aber $n \neq n_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt $x_n = \xi$, also $|f(x_n) - f(\xi)| = 0 < \varepsilon$. Es folgt $f(x_n) \to f(\xi)$.

"$\Rightarrow$". Diese Richtung ist trivial. $\square$

Satz 3.3.2 *Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M, $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\eta \in \mathbb{C}$. Dann ist die durch*

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M\backslash\{\xi\}\ , \\ \eta & \text{falls } x = \xi \end{cases}$$

definierte Funktion $F : M \cup \{\xi\} \to \mathbb{C}$ genau dann stetig in ξ, wenn $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ gilt.

Der *Beweis* folgt aus Satz 3.3.1, da $\lim_{x\to\xi} F(x) = \lim_{x\to\xi} f(x)$ gilt. (Die letzte Gleichung ist dabei in dem Sinne zu verstehen, dass aus der Existenz des einen Grenzwertes die des anderen folgt, und dass die Grenzwerte dann den gleichen Wert haben.)

Ist $\xi \notin M$ und $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, so heißt die in Satz 3.3.2 definierte Funktion F *stetige Ergänzung* (oder stetige Fortsetzung) von f (in ξ).

Für Grenzwerte von Summen, Produkten, usw. von Funktionen gelten wieder die üblichen Rechenregeln. Auch die ε-δ-Definition der Stetigkeit (angewandt auf die Funktion F von oben) überträgt sich entsprechend.

Satz 3.3.3 *Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M, $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\eta \in M$. Dann gilt $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $x \in M\backslash\{\xi\}$ mit $|x-\xi| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)-\eta| < \varepsilon$ gilt, d. h., wenn*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists\delta \in \mathbb{R}_+ \forall x \in M\backslash\{\xi\} : |x-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x)-\eta| < \varepsilon.$$

Beispiel. Es gilt

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Beweis. Für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{e^z-1}{z} = \frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} - 1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}.$$

Es folgt

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)!}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^j}{(j+1)!}.$$

Für $0 < |z| < 1$ gilt damit

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| \leq |z| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)!} = |z|(e-2).$$

Dies ergibt $\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| < \varepsilon$ für $|z| < \min\{\frac{\varepsilon}{e-2}, 1\}$. $\square$

Satz 3.3.4 (Cauchykriterium für Funktionengrenzwerte) *Sei $M \subset \mathbb{C}$, ξ Häufungspunkt von M und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x\to\xi} f(x)$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $x, y \in M\backslash\{\xi\}$ mit $|x-\xi| < \delta$ und $|y-\xi| < \delta$ die Ungleichung $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ gilt, d. h., wenn*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists\delta \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in M\backslash\{\xi\} : |x-\xi| < \delta \wedge |y-\xi| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Beweis. "$\Rightarrow$". Sei $\eta := \lim_{x\to\xi} f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.3.3 existiert $\delta > 0$, so dass $|f(x)-\eta| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x \in M\setminus\{\xi\}$ mit $|x-\xi| < \delta$. Für $x, y \in M\setminus\{\xi\}$ mit $|x-\xi| < \delta$ und $|y-\xi| < \delta$ folgt dann $|f(x)-f(y)| \le |f(x)-f(\eta)|+|f(\eta)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

"$\Leftarrow$". Sei (x_n) Folge in $M\setminus\{\xi\}$ mit $x_n \to \xi$. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\delta > 0$ mit der im Satz angegebenen Eigenschaft gewählt. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - \xi| < \delta$ für $n \ge N$. Für $m, n \ge N$ folgt dann $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$. Damit ist $(f(x_n))$ Cauchyfolge, also konvergent. Sei $\eta := \lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

Ist nun (x'_n) eine Folge in $M\setminus\{\xi\}$ mit $x'_n \to \xi$, so existiert ebenfalls $\eta' := \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Da aber auch $(x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots)$ eine Folge in $M\setminus\{\xi\}$ mit Grenzwert ξ ist, folgt $\eta' = \eta$ und damit die Behauptung. $\square$

Definition 3.3.3 Sei $M \subset \mathbb{R}$, ξ Häufungspunkt von $M_r := M \cap [\xi, \infty)$ und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Existiert dann $\eta_r := \lim_{x\to\xi}(f|M_r)(x)$, so heißt η_r *rechtsseitiger Grenzwert* von $f(x)$ für $x \to \xi$ und wird mit $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ bezeichnet.

Analog heißt $\lim_{x\to\xi-} f(x) := \lim_{x\to\xi}(f|M_l)(x)$ *linksseitiger Grenzwert* von $f(x)$ für $x \to \xi$ (falls er existiert), wobei $M_l := M \cap (-\infty, \xi]$.

Ist ξ Häufungspunkt von M_r, so ist ξ auch Häufungspunkt von M. Existiert dann $\lim_{x\to\xi} f(x)$, so existiert auch $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ und die Werte sind gleich. Analoges gilt falls ξ Häufungspunkt von M_l ist.

Ist ξ Häufungspunkt von M_r und M_l, so existiert $\lim_{x\to\xi} f(x)$ genau dann, wenn $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ und $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ beide existieren und gleich sind. In diesem Falle gilt $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x)$.

Definition 3.3.4 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $\xi \in M$ und $f : M \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Seien M_r und M_l wie in Definition 3.3.3. Dann heißt f *rechtsseitig stetig* in ξ falls $f|M_r$ stetig in ξ ist und *linksseitig stetig* in ξ falls $f|M_l$ stetig in ξ ist.

Ist ξ Häufungspunkt von M_r bzw. M_l, so erhält man aus Satz 3.3.1 unmittelbar, dass f genau dann rechts- bzw. linksseitig stetig in ξ ist, wenn $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$ bzw. $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$.

Weiter sieht man leicht ein, dass f genau dann stetig in ξ ist, wenn f rechts- und linksseitig stetig in ξ ist.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{falls } x < 0\ , \\ e^{\sqrt{x}} & \text{falls } x \ge 0. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass f stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist.

Außerdem gilt $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$ wegen des Beispiels nach Satz 3.3.3 und $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = e^0 = 1$ da $f|[0,\infty)$ stetig ist. Es folgt, dass f stetig in 0 ist.

Insgesamt ist f also stetig (in $\mathbb{R}$).

3.4 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Definition 3.4.1 Die durch $\cos z := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$ und $\sin z := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ definierten Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ heißen *Cosinus* und *Sinus*.

Da exp stetig ist, sind nach §3.1 auch cos und sin stetig. Wir stellen einige einfache Eigenschaften zusammen (dabei sind im folgenden immer $z, w \in \mathbb{C}$):

$$\cos 0 = 1,\ \sin 0 = 0,\ \cos(-z) = \cos z,\ \sin(-z) = -\sin z.$$

Aus $e^{z+w} = e^z e^w$ erhält man mit kurzer Rechung die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w, \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w. \end{aligned}$$

Mit $w = -z$ folgt insbesondere

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

(Hierbei steht $\cos^2 z$ für $(\cos z)^2$.) Weiterhin gilt

$$\cos z + i \sin z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) + i\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = e^{iz}.$$

Die Potenzreihendarstellung des Cosinus erhält man wie folgt. Zunächst ist

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}i^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i)^n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\left([i^n + (-i)^n]\right) z^n$$

Für n ungerade folgt $\frac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right) = 0$. Für n gerade, etwa $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, folgt $\frac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^k + (-1)^k\right) = (-1)^k$. Es ergibt sich

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \dots.$$

Analog folgt

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1} = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \dots.$$

Insbesondere folgt, dass für $x \in \mathbb{R}$ auch $\cos x \in \mathbb{R}$ und $\sin x \in \mathbb{R}$ gilt. Weiter ist für $x \in \mathbb{R}$ auch $\mathrm{Re}\,(e^{ix}) = \cos x$, $\mathrm{Im}\,(e^{ix}) = \sin x$ und $|e^{ix}| = 1$.

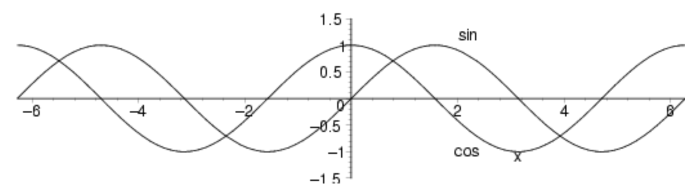

Abbildung 5: Die Graphen des (auf $\mathbb{R}$ eingeschränkten) Sinus und Cosinus.

Satz 3.4.1 *Für $x \in [0,2]$ gilt*

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$$

und

$$x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x.$$

Insbesondere gilt $\cos 1 > 0$, $\cos 2 < 0$ *und* $\sin x > 0$ *für alle* $x \in (0,2]$.

Beweis. Sei $x \in [0,2]$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $c_k := \frac{x^{2k}}{(2k)!}$. Dann gilt

$$c_{k+1} = \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} = \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)} \le \frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}c_k \le c_k.$$

Die Folge (c_k) ist also monoton fallend. Außerdem konvergiert sie gegen 0. Das Leibnizkriterium liefert nun einerseits, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k c_k$ konvergiert, und andererseits, dass für die Summe s der Reihe und die Partialsummen s_n die Ungleichung $s_1 \le s \le s_2$ gilt. Die Konvergenzaussage ist nun nicht neu, denn wir kennen ja sogar schon die Summe $s = \cos x - 1$ der Reihe. Wir benutzen aber jetzt die Ungleichung für die Partialsummen und erhalten

$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 + s_1 \le 1 + s = \cos x \le 1 + s_2 = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

Die Abschätzung für $\sin x$ erhält man analog.

Die Behauptungen $\cos 1 > 0$, $\cos 2 < 0$ und $\sin x > 0$ für alle $x \in (0,2]$ folgen unmittelbar aus den Abschätzungen für $\cos x$ und $\sin x$. $\square$

Die Graphen des Cosinus und Sinus sowie der in Satz 3.4.1 auftretenden Teilsummen der Potenzreihen sind in Abbildung 6 dargestellt.

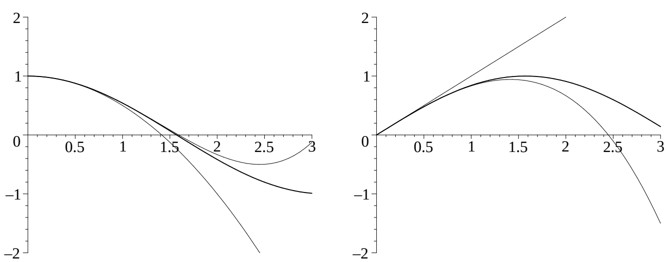

Abbildung 6: Cosinus (links), Sinus (rechts) und Teilsummen der Potenzreihen.

Satz 3.4.2 *Der Cosinus ist im Intervall $[0,2]$ streng monoton fallend, d. h., die Funktion* $\cos|[0,2]$ *ist streng monoton fallend.*

Beweis. Sei $0 \le x < y \le 2$. Mit $s := (y+x)/2$ und $t := (y-x)/2$ gilt $x = s - t$ und $y = s + t$ sowie $0 < s < 2$ und $0 < t < 2$. Wegen $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$ folgt aus dem Additionstheorem

$$\begin{aligned} \cos y - \cos x &= \cos(s+t) - \cos(s-t) \\ &= \cos s \cos t - \sin s \sin t - (\cos s \cos(-t) - \sin s \sin(-t)) \\ &= -2 \sin s \sin t. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.4.1 gilt $\sin s > 0$ und $\sin t > 0$ und damit $\cos y < \cos x$. $\square$

Satz 3.4.3 *Der Cosinus hat im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle ξ. Es gilt* $1 < \xi < 2$.

Beweis. Da $\cos 1 > 0$ und $\cos 2 < 0$ folgt die Existenz einer Nullstelle ξ aus dem Zwischenwertsatz. Die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie. $\square$

Wir benutzen jetzt obigen Satz zur Definition der "Kreiszahl" π.

Definition 3.4.2 Die Zahl π ist definiert durch $\pi := 2\xi$, wobei ξ die Nullstelle des Cosinus aus Satz 3.4.3 ist.

Satz 3.4.4 *Es ist* $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ *und für* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$, $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$, $\sin(z+\pi) = -\sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$, $\sin(z+2\pi) = \sin z$ *und* $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Beweis. Nach Definition von π gilt $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Wegen $\cos^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ und $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ folgt hieraus $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \sin z \cos\frac{\pi}{2} + \cos z \sin\frac{\pi}{2} = \cos z.$$

Analog beweist man $\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z$. Hieraus folgen die weiteren Gleichungen leicht. Bei der letzten benutze man $e^z = \cos\frac{z}{i} + i \sin\frac{z}{i}$. $\square$

Da der Cosinus im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend ist und $\cos^2 x + \sin^2 x$ und $\sin x \ge 0$ für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ gilt, folgt, dass der Sinus in diesem Intervall streng monoton steigend ist. Wegen $\sin 0 = 0$ und $\sin(-x) = -\sin x$ folgt, dass der Sinus sogar im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend ist. Wegen $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ist damit durch $x \mapsto \sin x$ eine bijektive Funktion von $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ nach $[-1,1]$ definiert; vgl. Satz 3.2.3. Ihre Umkehrfunktion heißt Arcus Sinus und wird mit arcsin bezeichnet, also $\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mit

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \text{für} \quad x \in [-1,1]$$

und

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{für} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Man beachte, dass die letzte Gleichung *nicht* für $x \in \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ gilt. Aus Satz 3.2.3 folgt, dass arcsin stetig ist.

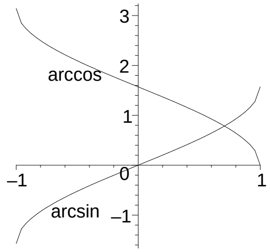

Abbildung 7: Die Graphen des Arcus Sinus und Arcus Cosinus.

Ähnlich sieht man, dass der Cosinus sogar auf dem Intervall $[0,\pi]$ streng monoton fallend ist. Durch $x \mapsto \cos x$ wird also eine bijektive Funktion von $[0,\pi]$ nach $[-1,1]$ definiert. Ihre Umkehrfunktion heißt Arcus Cosinus und wird mit arccos bezeichnet.

Zur Definition von zwei weiteren Funktionen Tangens und Cotangens benötigen wir noch folgenden Satz.

Satz 3.4.5 *Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt $\cos z = 0$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ existiert, und es gilt $\sin z = 0$ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = k\pi$ existiert.*

Beweis. "$\Leftarrow$". Dies ist klar nach Satz 3.4.4

"$\Rightarrow$". Sei $\cos z = 0$, $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Nach Definition des Cosinus folgt dann $e^{iz} = -e^{-iz} = -\frac{1}{e^{iz}}$, also $\left(e^{iz}\right)^2 = 1$, insbesondere $|e^{iz}| = 1$. Wegen $|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = |e^{ix}e^{-y}| = |e^{ix}|\, e^{-y} = e^{-y}$ folgt $e^{-y} = 1$, also $y = 0$. Damit ist $z = x \in \mathbb{R}$.

Sei nun $k := \max\{j \in \mathbb{Z} : j\pi \le x\}$ und $t := x - k\pi$. Dann gilt $0 \le t < \pi$ und $\cos t = -\cos(t+\pi) = \cos(t+2\pi) = \cdots = (-1)^k \cos(t+k\pi) = (-1)^k \cos x = 0$. Nach Definition von π folgt $t \ge \frac{\pi}{2}$. Wegen $\cos(\pi - t) = -\cos(-t) = -\cos t = 0$ folgt aber auch $\pi - t \ge \frac{\pi}{2}$, insgesamt also $t = \frac{\pi}{2}$ und damit $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Die entsprechende Aussage für den Sinus folgt wegen $\sin z = -\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$. $\square$

Definition 3.4.3 Die durch $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ und $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ definierten Funktionen $\tan : \mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}$ und $\cot : \mathbb{C}\setminus\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ heißen *Tangens* und *Cotangens*.

Die Funktionen tan und cot sind stetig. Für z aus dem entsprechenden Definitionsbereich gilt

$$\tan(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z$$

und analog $\cot(z+\pi) = \cot z$. Viele weitere Eigenschaften von Tangens und Cotangens lassen sich leicht aus denen von Cosinus und Sinus ableiten.

Insbesondere sieht man leicht, dass der Tangens streng monoton steigend im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist und dieses Intervall auf $\mathbb{R}$ abbildet. Die Umkehrfunktion heißt Arcus Tangens und wird mit arctan bezeichnet. Es gilt also $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Schließlich ist der Cotangens streng monoton fallend im Intervall $(0,\pi)$ und er bildet dieses Intervall auf $\mathbb{R}$ ab. Die Umkehrfunktion heißt Arcus Cotangens und wird mit arccot bezeichnet.

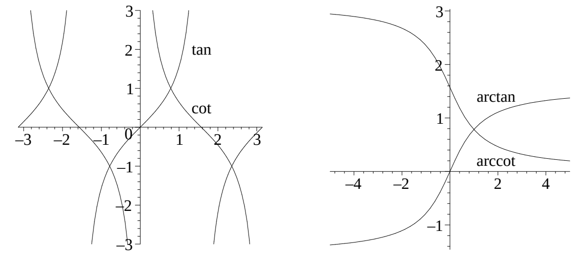

Abbildung 8: Der Tangens, Cotangens und ihre Umkehrfunktionen.

Definition 3.4.4 Die durch $\cosh z := \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right)$, $\sinh z := \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$, sowie $\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$ und $\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$ definierten Funktionen $\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\tanh : \mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) : k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{C}$ und $\coth : \mathbb{C}\setminus\{ik\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ heißen *Cosinus hyperbolicus*, *Sinus hyperbolicus*, *Tangens hyperbolicus* und *Cotangens hyperbolicus*.

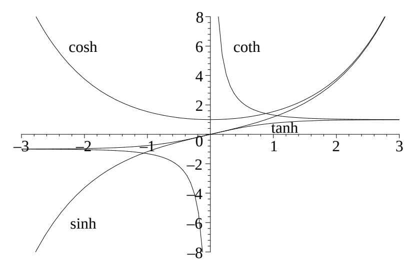

Abbildung 9: Die Graphen der hyperbolischen Funktionen.

Die in Definition 3.4.1 und 3.4.3 definierten Funktionen heißen *trigonometrische Funktionen*. Die in Definition 3.4.4 definierten Funktionen heißen *hyperbolische Funktionen*.

Auch die hyperbolischen Funktionen sind wieder stetig. Es gilt $\cosh z = \cos iz$, $\sinh z = -i \sin iz$, $\tanh z = -i \tan iz$ und $\coth z = i \cot iz$.

Wir verzichten hier auf eine Diskussion der Umkehrfunktionen der (auf geeignete Intervalle eingeschränkten) hyperbolischen Funktionen. Diese werden Area sinus hyperbolicus, Area cosinus hyperbolicus, usw., genannt und mit arsinh, arcosh, artanh, arcoth bezeichnet.

3.5 Polarkoordinaten

Mit Hilfe der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen kann man folgenden Satz beweisen.

Satz 3.5.1 *Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann existiert genau ein $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit $z = |z|e^{i\varphi}$.*

Beweis. Sei $z/|z| = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt $u^2 + v^2 = 1$ und daher $|u| \leq 1$ und $|v| \leq 1$. Wir setzen $\psi := \arccos u$ und $\varphi := \psi$ falls $v \geq 0$ und $\varphi := -\psi$ falls $v < 0$. Nun gilt $\cos\varphi = \cos\psi = u$. Außerdem gilt $\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi = 1 - u^2 = v^2$ und daher $\sin\psi = |\sin\psi| = |v|$. (Man beachte, dass $\sin\psi \geq 0$ wegen $0 \leq \psi \leq \pi$.) Dies liefert $\sin\varphi = v$. Es folgt

$$z = |z|(u + iv) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}.$$

Umgekehrt folgt aus $e^{i\varphi} = u + iv$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ sofort dass $\cos\varphi = u$, und hieraus folgt leicht, dass $\varphi = \arccos u$ falls $\varphi \in [0, \pi]$ und $\varphi = -\arccos u$ sonst. Damit ist also φ eindeutig bestimmt. □

Man nennt dies die Darstellung

$$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

aus Satz 3.5.1 die *Polarkoordinatendarstellung* von z und nennt φ das *Argument* von z.

Die Polarkoordinaten liefern eine geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen: mit $z_1 = r_1e^{it_1}$ und $z_2 = r_2e^{it_2}$ ist $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(t_1+t_2)}$. Im Abbildung 10 etwa ist $z_1 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{3}{2}e^{i\pi/4} = \frac{3}{4}\sqrt{2}(1 + i)$ und $z_1z_2 = 3e^{i7\pi/12}$.

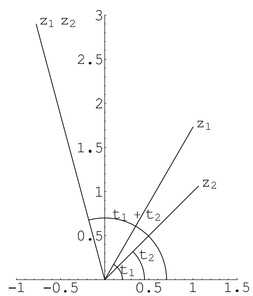

Abbildung 10: Geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen.

Satz 3.5.2 *Für $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n Lösungen, nämlich $z = \omega_k := \exp(2\pi ik/n)$, wobei $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.*

Beweis. Wegen $\omega_k^n = (\exp(2\pi ik/n))^n = \exp(2\pi i) = 1$ leisten die ω_k das Verlangte. Da ein Polynom vom Grad n nicht mehr als n Nullstellen haben kann, folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die ω_k heißen n-te *Einheitswurzeln*.

Wir können jetzt Satz 1.8.1 über die Existenz von Quadratwurzeln wie folgt verallgemeinern.

Satz 3.5.3 *Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die Gleichung $z^n = w$ eine Lösung. Ist ζ eine Lösung, so ist $\{\zeta\omega_0, \zeta\omega_1, \ldots, \zeta\omega_{n-1}\}$ die Lösungsmenge der Gleichung.*

Beweis. Nach Satz 3.5.1 existiert $\varphi \in [-\pi, \pi)$ mit $w = |w|e^{i\varphi}$. Damit erhalten wir eine Lösung $\zeta := \sqrt[n]{|w|}e^{i\varphi/n}$. Dass die Lösungsmenge die angegebene Form hat, folgt leicht aus Satz 3.5.1. □

3.6 Kompakte Mengen

Definition 3.6.1 Sei $K \subset \mathbb{C}$. Dann heißt K *kompakt*, falls jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in K liegt.

Beispiel 1. Abgeschlossene Intervalle sind kompakt, d. h., sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so ist das Intervall $[a, b]$ kompakt.

Beweis. Sei (x_n) Folge in $[a, b]$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergente Teilfolge, etwa $x_{n_k} \to x$. Nach Satz 2.2.4 (man vgl. den im Anschluss an Satz 2.2.4 betrachteten Spezialfall) folgt $a \leq x \leq b$, das heißt, $x \in [a, b]$. □

Beispiel 2. Für $R > 0$ ist $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$ kompakt. Der Beweis ist analog zu Beispiel 1, wenn man noch Satz 2.2.3 beachtet.

Beispiel 3. $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ ist nicht kompakt, da $\left(\frac{1}{n}\right)$ Folge in A, $\frac{1}{n} \to 0$, aber $0 \notin A$. Es ist aber $A \cup \{0\}$ kompakt.

Beispiel 4. Endliche Teilmengen von $\mathbb{C}$ sind kompakt.

Satz 3.6.1 *Kompakte Mengen sind beschränkt.*

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt. Wir nehmen an, dass K nicht beschränkt ist. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in K$ mit $|x_n| > n$. Es ist dann jede Teilfolge von (x_n) unbeschränkt und damit divergent. Also hat (x_n) keine konvergente Teilfolge, ein Widerspruch. □

Satz 3.6.2 *Kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ haben ein Minimum und ein Maximum.*

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Nach Satz 3.6.1 ist K beschränkt und damit existiert $\sup K \in \mathbb{R}$. Desweiteren existiert eine Folge (x_n) in K mit $x_n \to \sup K$. Da K kompakt ist, folgt $\sup K \in K$, das heißt, K hat ein Maximum. Analog sieht man, dass K ein Minimum hat. □

Satz 3.6.3 *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.*

Beweis. Sei (y_n) Folge in $f(K)$. Dann existiert eine Folge $(x_n) \in K$ mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da K kompakt, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) und $\xi \in K$ mit $x_{n_k} \to \xi$. Da f stetig in ξ, folgt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(\xi) \in f(K)$. □

Ist $K \subset M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \to \mathbb{C}$ stetig in K, so ist auch $f|K$ stetig; vgl. Übung. Für kompaktes K kann dann Satz 3.6.3 auf $f|K$ angewandt werden, und man erhält, dass $f(K)$ kompakt ist. Eine analoge Bemerkung gilt für den folgenden Satz.

Satz 3.6.4 *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und sei $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an, d. h., es existieren $\alpha, \beta \in K$ mit $f(\alpha) = \min f(K)$ und $f(\beta) = \max f(K)$.*

Beweis. Es ist $f(K)$ kompakt nach Satz 3.6.3 und damit folgt die Behauptung aus Satz 3.6.2. □

Mit Hilfe von Satz 3.5.3 und Satz 3.6.4 können wir einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra (Satz 1.8.2) geben.

Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei p ein Polynom vom Grad n, etwa $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_n = 1$ annehmen. Wir werden zuerst zeigen, die Funktion $|p|$ ihr Minimum in einem Punkt z_1 annimmt, und wir zeigen dann, dass $p(z_1) = 0$ gilt.

Dazu wählen wir
$$R > \max\left\{2\sum_{j=0}^{n-1}|a_j|, 1\right\}$$
und betrachten $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R\}$. Dann ist K kompakt. Nach Satz 3.6.4 nimmt $|p|$ sein Minimum in K in einem Punkt $z_1 \in K$ an. Für $|z| \ge R$ gilt nun

$$\begin{aligned}
|p(z)| &\ge |z^n| - \sum_{j=0}^{n-1}|a_j z^j| \\
&\ge R^n - \sum_{j=0}^{n-1}|a_j| R^j \\
&\ge R^n - R^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}|a_j| \\
&= R^{n-1}\left(R - \sum_{j=0}^{n-1}|a_j|\right) \\
&> R^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}|a_j| \\
&\ge |a_0| \\
&= |p(0)| \\
&\ge |p(z_1)|
\end{aligned}$$

Es folgt $|z_1| < R$ und $|p(z_1)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$.

Wir zeigen nun, dass $p(z_1) = 0$ gilt. Dazu können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $z_1 = 0$ gilt, da wir andernfalls das durch $q(z) := p(z + z_1)$ definierte Polynom q statt p betrachten können. (Man überzeugt sich leicht, dass q tatsächlich ein Polynom ist.) Sei $\ell := \min\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : a_j \neq 0\}$. Mit $a_j := a_j/a_0$ erhalten wir
$$p(z) = a_0\left(1 + \sum_{j=\ell}^{n} c_j z^j\right).$$
Nach Satz 3.5.3 existiert nun $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\zeta^\ell = -1/a_\ell$. Wir erhalten
$$p(\zeta t) = b_0\left(1 - t^\ell + h(t)\right)$$
mit
$$h(t) := \sum_{j=\ell+1}^{n} \frac{c_j}{\zeta^j} t^j.$$
Sei
$$\delta := \frac{1}{2\sum_{j=\ell+1}^{n}\left|\frac{c_j}{\zeta^j}\right| + 1}.$$
Für $t \in (0, \delta)$ gilt dann
$$|h(t)| \le t^{\ell+1}\sum_{j=\ell+1}^{n}\left|\frac{c_j}{\zeta^j}\right| \le t^\ell \delta \sum_{j=\ell+1}^{n}\left|\frac{c_j}{\zeta^j}\right| < \frac{1}{2}t^\ell$$
und damit
$$\begin{aligned}
\left|1 - t^\ell + h(t)\right| &\le \operatorname{Re}\left(1 - t^\ell + h(t)\right) + \operatorname{Im}\left(1 - t^\ell + h(t)\right) \\
&= 1 - t^\ell + \operatorname{Re} h(t) + \operatorname{Im} h(t) \\
&\le 1 - t^\ell + 2|h(t)| < 1.
\end{aligned}$$
Wir erhalten
$$|p(\zeta t)| = |a_0\left(1 - t^\ell + h(t)\right)| < |a_0| = |p(0)|.$$
Da $|p|$ sein Minimum in $z_1 = 0$ annimmt, ist dies ein Widerspruch. □

Definition 3.6.2 Sei $M \subset \mathbb{C}$ und $f : M \to \mathbb{C}$. Dann heißt f *gleichmäßig stetig* falls zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass für alle $x, y \in M$ mit $|x - y| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ist.

Für $K \subset M$ heißt f *gleichmäßig stetig in* K (oder *auf* K), falls $f|K$ gleichmäßig stetig ist.

In Quantorenschreibweise lautet die in der Definition angegebene Eigenschaft wie folgt:
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists \delta \in \mathbb{R}_+ \forall x, y \in M : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Zum Vergleich betrachten wir noch einmal die ε-δ-Definition der Stetigkeit im Punkte x (Satz 3.1.2):

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists\delta \in \mathbb{R}_+ \forall y \in M : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Im Unterschied zur gleichmäßigen Stetigkeit darf δ hier also nicht nur von ε, sondern auch noch von x abhängen. Insbesondere erkennt man, dass aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Stetigkeit folgt. (Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von f in K folgt aber nicht die Stetigkeit von f in K, sondern nur die von $f|K$.)

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Dann ist f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}$. Denn ist $\varepsilon = 1$ und $\delta > 0$, so gilt für $y := \frac{1}{\delta}$ und $x := y + \frac{\delta}{2}$, dass $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$, aber

$$|f(x)-f(y)| = \left|\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Satz 3.6.5 *Sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann existiert $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall\delta \in \mathbb{R}_+ \exists x, y \in K : |x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon.$$

Insbesondere existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ damit $x_n, y_n \in K$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Da K kompakt, existiert eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) und $\xi \in K$ mit $x_{n_k} \to \xi$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ folgt auch $y_{n_k} \to \xi$. Wegen der Stetigkeit von f folgt $f(x_{n_k}) \to f(\xi)$ und $f(y_{n_k}) \to f(\xi)$, also $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$, im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$. $\square$

3.7 Folgen stetiger Funktionen

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [0,1]$, wobei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Es ist hier f unstetig, aber alle f_n sind stetig.

Definition 3.7.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge von Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Dann heißt (f_n) *punktweise konvergent* gegen f, falls $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in M$ gilt, d. h., falls

$$\forall x \in M \forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Die Folge (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen f, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in M$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Abschätzung $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ gilt, d. h. falls

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Wir schreiben auch $f_n \to f$ gleichmäßig (bzw. punktweise). Für $K \subset M$ heißt (f_n) gleichmäßig (bzw. punktweise) konvergent *in* K, falls $(f_n|K)$ gleichmäßig (bzw. punktweise) konvergiert.

Der Unterschied zwischen den beiden Konvergenzbegriffen ist, dass bei punktweiser Konvergenz die Zahl N nicht nur von ε, sondern auch von x abhängen darf, während sie bei gleichmäßiger unabhängig von x gewählt werden kann.

Seien $f_n, f, g_n, g : M \to \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt unmittelbar, dass aus der punktweisen Konvergenz von (f_n) gegen f und der der punktweisen Konvergenz von (g_n) gegen g auch die punktweise Konvergenz von $(f_n + g_n)$ gegen $f + g$, die von (cf_n) gegen cf und die von $(f_n \cdot g_n)$ gegen $f \cdot g$ folgt. Die dortigen Beweise zeigen, dass aus der der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) gegen f und (g_n) gegen g auch die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n + g_n)$ gegen $f + g$ und die von (cf_n) gegen cf folgt. Das entsprechende Resultat für $(f_n \cdot g_n)$ gilt nicht, wie das Gegenbeispiel $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = x, g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ zeigt. Die entsprechende Aussage gilt aber, falls f und g beschränkt sind.

Den folgenden Satz beweist man genauso wie bei Zahlenfolgen (vgl. Satz 2.3.5).

Satz 3.7.1 (Cauchykriterium für Funktionenfolgen) *Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge von Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Dann konvergiert (f_n) genau dann gleichmäßig, wenn für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $x \in M$ und für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $m \geq N$ die Abschätzung $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ gilt, d. h. falls*

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq N \wedge n \geq N \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Satz 3.7.2 *Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge von Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Es gelte $f_n \to f$ gleichmäßig. Sind dann alle f_n stetig (in $\xi \in M$), so ist f stetig (in $\xi \in M$).*

Beweis. Sei $\xi \in M$ und seien alle f_n stetig in ξ. Zu zeigen ist, dass f stetig in ξ ist.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $f_n \to f$ gleichmäßig, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq N$. Da f_N stetig in ξ, existiert $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$. Es folgt für $x \in M$ mit $|x - \xi| < \delta$, dass

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\xi)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(\xi) + f_N(\xi) - f(\xi)| \\ &= |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\xi)| + |f_N(\xi) - f(\xi)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 3.7.1, Satz 3.7.2 sowie obige Bemerkungen gelten analog für Reihen (denn diese sind ja nichts anderes als Folgen).

Sind also etwa die Funktionen $f_k : M \to C$ stetig für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, so ist auch die durch $x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ definierte Funktion von M nach $\mathbb{C}$ stetig. Insbesondere erhält man auch den folgenden Satz (vgl. Satz 2.6.4).

Satz 3.7.3 (Cauchykriterium für Funktionenreihen) *Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei (f_k) eine Folge von Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ genau dann gleichmäßig, wenn*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall m, n \in \mathbb{N} : m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Satz 3.7.4 (Majorantenkriterium) *Sei $M \subset \mathbb{C}$ und sei (f_k) eine Folge von Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe nichtnegativer reeller Zahlen. Existiert dann $L \in \mathbb{N}$ mit $|f_k(x)| \leq c_k$ für alle $k \geq L$ und alle $x \in M$, so konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\sum_{k=n+1}^{m} c_k\right| < \varepsilon$ für $m > n \geq N$. Es folgt

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon$$

für $m > n \geq \max\{N, L\}$ und $x \in M$. Die Behauptung folgt aus dem Cauchykriterium für Funktionenreihen. □

Wir bezeichnen die ε-Umgebung eines Punktes a mit $U(a, \varepsilon)$, d. h., $U(a, \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$. Es ist also $U(a, \infty) := \mathbb{C}$.

Satz 3.7.5 *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Es sei $0 < r \leq \infty$. Dann ist die durch $z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ definierte Funktion $f : U(z_0, r) \to \mathbb{C}$ stetig. Ist $0 < \rho < r$, so konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig in $U(z_0, \rho)$.*

Beweis. Es genügt die zweite Aussage zu beweisen, da hieraus die erste leicht mit Satz 3.7.2 folgt.

Sei dazu $0 < \rho < s < r$. Dann gilt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1}{s}$. Damit existiert $K \in N$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{s}$ für $k \geq K$. Für $z \in U(z_0, \rho)$ und $k \geq K$ folgt damit

$$\left| a_k (z - z_0)^k \right| = |a_k| \cdot |z - z_0|^k \leq \left(\frac{1}{s}\right)^k \rho^k = \left(\frac{\rho}{s}\right)^k.$$

Die Behauptung folgt nun mit $c_k := \left(\frac{\rho}{s}\right)^k$ aus Satz 3.7.4. □

Zum *Beispiel* folgt aus obigem Satz, dass die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist. (Dies wurde bereits im Beweis von Satz 2.9.5 benutzt.) Allgemeiner sieht man, dass für $a \in \mathbb{R}_+$ die durch $z \mapsto a^z := \exp(z \cdot \ln a)$ definierte Funktion von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ stetig ist.

4 Differenzierbarkeit

4.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 4.1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M. Dann heißt f *differenzierbar in* ξ, wenn

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt dann *Ableitung* von f in ξ (oder an der Stelle ξ). Er wird mit $f'(\xi)$ oder $\frac{df}{dx}(\xi)$ bezeichnet.

Ist M' die Menge der Häufungspunkte von M, in denen f differenzierbar ist, so wird durch $x \mapsto f'(x)$ eine Funktion $f' : M' \to \mathbb{C}$ definiert, die *Ableitung* von f. Diese wird auch mit $\frac{df}{dx}$ bezeichnet.

Ist $A \subset M$, so heißt f *differenzierbar in* A falls $A \subset M'$. Ist $M' = M$, so heißt f *differenzierbar*.

Bemerkungen. 1. Für f' bzw. $f'(x)$ wird auch die (etwas problematische) Bezeichnung $\frac{df(x)}{dx}$ verwandt.

2. Die Idee ist (für reellwertiges f) natürlich folgende: durch

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

ist die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ gegeben, und im Grenzwert $x \to \xi$ sollte man die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkte $(\xi, f(\xi))$ erhalten. Durch $x \mapsto f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi)$ ist dann die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(\xi, f(\xi))$ gegeben.

3. Auch bei Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ sind in Definition 4.1.1 uneigentliche Grenzwerte (also $f'(\xi) = \pm\infty$) *nicht* zugelassen.

4. Man kann den Grenzwert in Definition 4.1.1 auch in der Form

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}$$

schreiben.

Beispiel 1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$.
Behauptung. Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(x) = nx^{n-1}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Beweis. Für $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ist

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \ldots,$$

und daraus folgt für $h \to 0$ die Behauptung. □

Beispiel 2. Sei $a \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{ax} (= \exp ax)$.
Behauptung. Die Funktion f ist differenzierbar und $f'(x) = ae^{ax}$ für $x \in \mathbb{R}$.
Beweis. Für $x, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ist

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{e^{ax+ah} - e^{ax}}{h} = \frac{e^{ax}e^{ah} - e^{ax}}{h} = ae^{ax}\frac{e^{ah} - 1}{ah}.$$

Wegen $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = 1$ (vgl. §3.3) folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.1 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M. Dann ist f genau dann differenzierbar in M, wenn eine in ξ stetige Funktion $q : M \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = f(\xi) + q(x)(x - \xi)$ für $x \in M$ existiert. Ist dies der Fall, so gilt $q(\xi) = f'(\xi)$.*

Beweis. Sei $\eta \in \mathbb{C}$. Nach Satz 3.3.2 gilt

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \eta$$

genau dann, wenn die durch

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} & \text{falls } x \in M\backslash\{\xi\} , \\ \eta & \text{falls } x = \xi \end{cases}$$

definierte Funktion $q : M \to \mathbb{C}$ stetig in ξ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 4.1.2 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{C}$ und $\xi \in M$ Häufungspunkt von M. Ist f differenzierbar in ξ, so ist f stetig in ξ.*

Der Satz besagt also, dass differenzierbare Funktionen stetig sind. Sein *Beweis* folgt unmittelbar aus Satz 4.1.1.

Satz 4.1.3 *Sei $M \subset \mathbb{R}$, $\xi \in M$ Häufungspunkt von M, $f, g : M \to \mathbb{C}$ differenzierbar in ξ und $c \in \mathbb{C}$. Dann sind $f+g$, $c\cdot f$, $f\cdot g$ und im Falle $g(\xi) \neq 0$ auch die (in $M\backslash g^{-1}(0)$ definierte) Funktion $\frac{f}{g}$ differenzierbar in ξ und es gilt*

(i) $(f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi)$,

(ii) $(c\cdot f)'(\xi) = c\cdot f'(\xi)$,

(iii) $(f\cdot g)'(\xi) = f'(\xi)\cdot g(\xi) + f(\xi)\cdot g'(\xi)$,

(iv) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(\xi) = \dfrac{f'(\xi)\cdot g(\xi) - f(\xi)\cdot g'(\xi)}{g(\xi)^2}$.

Man nennt (iii) Produktregel und (iv) Quotientenregel.

Der *Beweis* von (i) und (ii) ist sehr einfach und hier ausgelassen. Zum Beweise von (iii) beachte man, dass für $x \neq \xi$

$$\begin{aligned} \frac{(f\cdot g)(x) - (f\cdot g)(\xi)}{x-\xi} &= \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(\xi)g(x) + f(\xi)g(x) - f(\xi)g(\xi)}{x-\xi} \\ &= \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} g(x) + f(\xi)\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi} \end{aligned}$$

gilt. Da $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ wegen Satz 4.1.2, folgt hieraus die Behauptung.

Die Quotientenregel (iv) folgt auf ähnliche Weise. Wir verzichten auf die Details. □

Beispiele. 1. Sinus und Cosinus (auf $\mathbb{R}$ eingeschränkt) sind differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Denn wegen $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$, Beispiel 2 zu Definition 4.1.1 und Satz 4.1.3, (i) und (ii), ist der Sinus differenzierbar und

$$\sin' x = \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} - (-i)e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos x$$

für $x \in \mathbb{R}$. Analog zeigt man $\cos' = -\sin$.

2. Tangens und Cotangens sind differenzierbar mit $\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$ und $\cot' = -1 - \cot^2 = -\frac{1}{\sin^2}$. Dies folgt aus der Quotientenregel. Zum Beispiel ist

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2 .$$

Satz 4.1.4 (Kettenregel) *Seien $M, N, L \subset \mathbb{R}$, $N \subset L$, $g : M \to N$, $f : L \to \mathbb{C}$. Sei $\xi \in M$ Häufungspunkt von M und $g(\xi)$ Häufungspunkt von L. Sei g differenzierbar in ξ und sei f differenzierbar in $g(\xi)$. Dann ist $f \circ g$ differenzierbar in ξ und es gilt $(f\circ g)'(\xi) = f'(g(\xi))g'(\xi)$.*

Beweis. Nach Satz 4.1.1 existieren in ξ bzw. $\eta := g(\xi)$ stetige Funktionen $p : M \to \mathbb{C}$ und $q : L \to C$ mit $g(x) = g(\xi) + (x-\xi)p(x)$ für $x \in M$ und $f(y) = f(\eta) + (y-\eta)q(y)$ für $y \in L$, und es gilt $g'(\xi) = p(\xi)$ und $f'(\eta) = q(\eta)$. Mit $y = g(x)$ folgt

$$(f\circ g)(x) = (f\circ g)(\xi) + (g(x) - g(\xi))q(g(x)) = (f\circ g)(\xi) + (x-\xi)p(x)q(g(x)).$$

Da die durch $x \mapsto p(x)q(g(x))$ definierte Funktion stetig in ξ ist und dort den Wert $p(\xi)q(g(\xi)) = g'(\xi)f'(g(\xi))$ hat, folgt mit Satz 4.1.1 die Behauptung. □

Beispiele. 1. Die Funktion $\exp\circ\cos$ ist differenzierbar und

$$(\exp\circ\cos)'(x) = \exp'(\cos x)\cos' x = -e^{\cos x}\sin x.$$

2. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\xi \in M$, so ist für $n \in \mathbb{N}$ auch $f^n : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ mit $(f^n)'(\xi) = nf^{n-1}(\xi)f'(\xi)$. Dies folgt aus der Kettenregel und Beispiel 1 zu Definition 4.1.1. Ist etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^3 x$, so gilt $f'(x) = 3\sin^2 x\cos x$.

Wir haben Differenzierbarkeit hier nur für Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ (und Zielbereich in $\mathbb{C}$) betrachtet. Lässt man in Definition 4.1.1 den Definitionsbereich in $\mathbb{C}$ zu, so erhält man den Begriff der *komplexen Differenzierbarkeit*. Es sei angemerkt, dass die bisherigen Resultate über Differenzierbarkeit – mit denselben Beweisen – auch für komplexe Differenzierbarkeit gelten. (Auch die im folgenden Satz auftauchende Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt noch für komplexe Differenzierbarkeit.) Ansonsten treten bei der Untersuchung der komplexen Differenzierbarkeit aber ganz andere Phänomene auf wie bei der Differenzierbarkeit von Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}$. Komplexe Differenzierbarkeit wird später (voraussichtlich in Analysis IV) ausführlich behandelt. Zuvor wird in Analysis II Differenzierbarkeit von Funktionen mit Definitionsbereich in $\mathbb{R}^n$ (und Zielbereich in $\mathbb{R}^m$) untersucht. (Für Funktionen von Teilmengen von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{C}$ erhalten wir also zwei Differenzierbarkeitsbegriffe!)

Im folgenden untersuchen wir Differenzierbarkeit nur für auf Intervallen definierte Funktionen. Ist I das Intervall $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ oder (a,b), so nennen wir das Intervall (a,b) das *Innere* von I und bezeichnen es mit $\mathrm{int}(I)$. Die Punkte a, b nennen wir auch *Randpunkte* von I.

Satz 4.1.5 *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f : I \to J$ stetig, streng monoton und surjektiv (und damit bijektiv nach Satz 3.2.3). Sei $\xi \in I$ und sei f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) \neq 0$. Dann ist f^{-1} differenzierbar in $\eta := f(\xi)$ und es gilt*

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}.$$

Beweis. Sei (y_n) Folge in $J\backslash\{\eta\}$ mit $y_n \to \eta$. Sei $x_n := f^{-1}(y_n)$. Da f^{-1} nach Satz 3.2.3 stetig ist, folgt $x_n \to f^{-1}(\eta) = \xi$. Wegen der Bijektivität von f ist auch $x_n \neq \xi$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(\eta)}{y_n - \eta} = \frac{x_n - \xi}{f(x_n) - f(\xi)} \to \frac{1}{f'(\xi)},$$

und daraus die Behauptung. □

Beispiele. 1. Der natürliche Logarithmus $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, nach Satz 4.1.5 also differenzierbar mit

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R}_+$.

Hieraus erhält man, dass für $a \in \mathbb{C}$ die durch $x \mapsto x^a$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ differenzierbar ist und $f'(x) = ax^{a-1}$ gilt. Denn dies folgt wegen $f(x) = \exp(a \ln x)$ aus der Kettenregel:

$$f'(x) = a \exp(a \ln x)(\ln)'(x) = ax^a \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Für $a \in \mathbb{N}$ ist dies das Beispiel 1 zu Definition 4.1.1.

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Dann ist f streng monoton steigend, stetig und bijektiv. Außerdem ist f differenzierbar mit $f'(x) = 3x^2$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist gegeben durch $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ (wobei wir dies für $y < 0$ durch $y^{1/3} = -(-y)^{1/3}$ definiert haben). Für $y \neq 0$ erhält man mit Satz 4.1.5 (oder durch die Wahl $a = \frac{1}{3}$ im vorigen Beispiel) sofort $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$.

Für $y = 0$ ist aber $x := f^{-1}(y) = 0$, also $f'(x) = 0$, und damit Satz 4.1.5 nicht anwendbar. Tatsächlich sieht man leicht, dass

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} = \frac{1}{y^{2/3}} \to \infty$$

für $y \to 0$, also f^{-1} nicht differenzierbar in 0 ist.

3. Wegen $\sin' x = \cos x > 0$ für x aus dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist arcsin differenzierbar im Intervall $(-1, 1)$ und es gilt dort

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

In den Punkten ± 1 ist arcsin nicht differenzierbar.

Analog sieht man, dass die Funktion $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ im Intervall $(-1, 1)$ differenzierbar ist und dort

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

gilt. Ebenso zeigt eine kurze Rechnung, dass $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar sind und

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{arccot}' x = -\frac{1}{1 + x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion muss nicht stetig sein. Als *Beispiel* betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Wir zeigen: (i) f ist differenzierbar, (ii) f' ist nicht stetig.

zu (i): Mit Produkt- und Kettenregel folgt, dass f differenzierbar in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist, mit

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

für $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Um die Differenzierbarkeit in 0 zu untersuchen, notieren wir zunächst, dass $|\sin t| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$ wegen $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. Es folgt

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

und damit

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

zu (ii): Sei $x_k = \frac{1}{2\pi k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_k \to 0$ und

$$f'(x_k) = 2x_k \sin 2\pi k - \cos 2\pi k = -1 \not\to 0 = f'(0).$$

Damit ist f' nicht stetig in 0.

Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 11 dargestellt.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Interpretation der Ableitung als Tangentensteigung problematisch sein kann.

Definition 4.1.2 Sei I Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann heißt f *stetig differenzierbar*, falls f' stetig ist.

Für $n \in \mathbb{N}$ heißt f *n-mal (stetig) differenzierbar*, falls die induktiv durch $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, $f^{(0)} := f$, definierte n-te Ableitung $f^{(n)}$ existiert (und stetig ist). Man schreibt f'' statt $f^{(2)} = (f')'$ und f''' statt $f^{(3)}$.

Zum *Beispiel* ist der Cosinus beliebig oft differenzierbar mit $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = \sin$, $\cos^{(4)} = \cos$ und damit $\cos^{(4k)} = \cos$, $\cos^{(4k+1)} = -\sin$, $\cos^{(4k+2)} = -\cos$ und $\cos^{(4k+3)} = \sin$ für $k \in \mathbb{N}$.

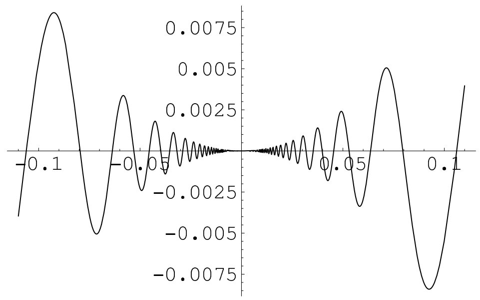

Abbildung 11: Der Graph der für $x \neq 0$ durch $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ gegebenen Funktion.

4.2 Der Mittelwertsatz

Definition 4.2.1 Sei $M \subset \mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{R}$, $\xi \in M$. Gilt $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in M$, so sagt man, dass f in ξ ein *globales Maximum* hat. Existiert $\varepsilon > 0$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in M$ mit $|x - \xi| < \varepsilon$, so sagt man, dass f in ξ ein *lokales Maximum* hat. Der Wert $f(\xi)$ wird dann als lokales Maximum bezeichnet.

Entsprechend spricht man von einem globalen bzw. lokalen Minimum. Ein *Extremum* ist ein Maximum oder Minimum.

Offensichtlich sind globale Extrema auch lokale Extrema, aber nicht umgekehrt.

Man betrachte etwa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2 - 1$; vgl. Abbildung 12. Wie man durch einen Blick auf den Graphen erkennt, und durch eine

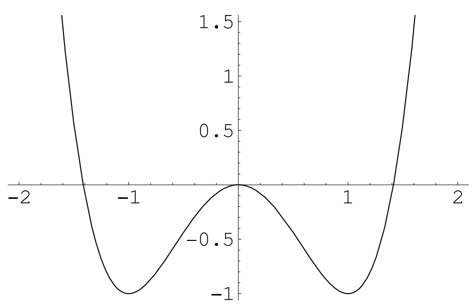

Abbildung 12: Der Graph der durch $f(x) = x^4 - 2x^2$ gegebenen Funktion f.

kurze Rechnung auch leicht verifiziert, hat diese Funktion in 0 ein lokales Maximum, aber sie besitzt kein globales Maximum. In 1 und -1 hat f ein globales (und lokales) Minimum.

Ist $M \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig, so existieren nach Satz 3.6.4 immer Punkte, in denen f sein globales Minimum und Maximum hat.

Satz 4.2.1 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und ξ innerer Punkt von I. Ist f differenzierbar in ξ und hat f in ξ ein lokales Extremum, so ist $f'(\xi) = 0$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit habe f ein lokales Minimum in ξ. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit mit $f(x) - f(\xi) \geq 0$ für alle $x \in I$ mit $|x - \xi| < \varepsilon$. Es folgt

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(\xi) = \lim_{x \to \xi-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0,$$

also $f'(\xi) = 0$. $\square$

Satz 4.2.2 (Mittelwertsatz) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Mittelwertsatz hat eine einfache anschauliche Interpretation: es existiert ein Punkt, wo die Steigung der Tangente an den Graphen von f gleich der Steigung der Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.

Im *Beispiel* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sin(\pi x)$ haben $\xi = \frac{1}{2}$ und $\xi = \frac{3}{2}$ die verlangte Eigenschaft; siehe Abbildung 13

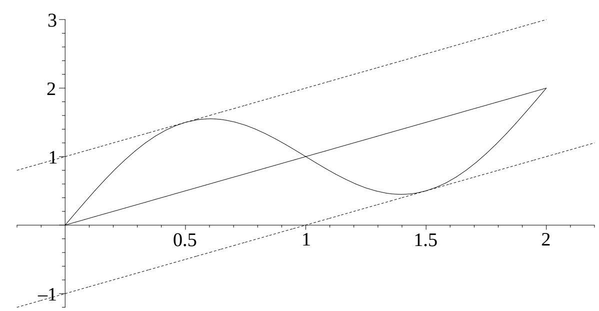

Abbildung 13: Illustration des Mittelwertsatzes.

Ein Spezialfall des Mittelwertsatzes ist der folgende Satz.

Satz 4.2.3 (Satz von Rolle) *Sind a, b, f wie in Satz 4.2.2 und ist außerdem noch $f(a) = f(b)$, so existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Wir beweisen zuerst diesen Spezialfall, und führen den allgemeinen Fall dann darauf zurück.

Beweis von Satz 4.2.3. Nach Satz 3.6.4 existieren $\alpha, \beta \in [a, b]$ so dass $f(\alpha) = \min f([a, b])$ und $f(\beta) = \max f([a, b])$. Nach Satz 4.2.1 folgt $f'(\alpha) = 0$ falls $\alpha \in$

(a,b) und $f'(\beta) = 0$ falls $\beta \in (a,b)$. Damit folgt die Behauptung, außer wenn $\{\alpha,\beta\} \subset \{a,b\}$. In diesem Fall ist aber wegen $f(a) = f(b)$ auch $f(\alpha) = f(\beta)$, also f konstant und damit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$. $\square$

Beweis von Satz 4.2.2. Wir betrachten $h : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Dann gilt

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = h(a).$$

Nach Satz von Rolle existiert also $\xi \in (a,b)$ mit

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad \square$$

Ersetzt man in obigem Beweis $h(x)$ durch

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

mit einer Funktion g, wobei $g(a) \neq g(b)$, so erhält man folgendes Resultat.

Satz 4.2.4 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Hierbei folgt $g(a) \neq g(b)$ aus dem Satz von Rolle, angewandt auf g.

Der Satz von Rolle – und folglich der (verallgemeinerte) Mittelwertsatz – gelten *nicht* für komplexwertige Funktionen. Zum *Beispiel* gilt für $f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$, dass $f(0) = f(2\pi) = 0$, aber $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ für alle x.

Es gilt aber immerhin noch der folgende Satz.

Satz 4.2.5 *Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit*

$$|f'(\xi)| \geq \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a}.$$

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $f(a) = f(b)$. Andernfalls setzt man

$$q := \frac{|f(b)-f(a)|}{f(b)-f(a)}$$

und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{Re}(qf(x))$. Der Mittelwertsatz liefert $\xi \in (a,b)$ mit

$$g'(\xi) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = \frac{|f(b)-f(a)|}{b-a}$$

und die Behauptung folgt wegen $|f'(\xi)| = |qf'(\xi)| \geq \mathrm{Re}(qf'(\xi)) = g'(\xi)$. $\square$

4.3 Anwendungen des Mittelwertsatzes

Satz 4.3.1 *Sei I Intervall und seien $f,g : I \to \mathbb{C}$ stetig und in $\mathrm{int}(I)$ differenzierbar. Gilt dann $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$, so existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $f(x) = g(x) + c$ für alle $x \in I$.*

Beweis. Die Funktion $h := f - g$ ist stetig in I, differenzierbar in $\mathrm{int}(I)$ und erfüllt $h'(x) = 0$ für $x \in \mathrm{int}(I)$. Aus Satz 4.2.5 folgt $h(x) = h(y)$ für $x,y \in I$. Damit ist h konstant. $\square$

Satz 4.3.2 *Sei I Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und in $\mathrm{int}(I)$ differenzierbar. Dann ist f monoton wachsend falls $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$ und monoton fallend falls $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$. Falls $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathrm{int}(I)$, so liegt strenge Monotonie vor.*

Beweis. Ist $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, so existiert nach Mittelwertsatz $\xi \in (x_1,x_2) \subset \mathrm{int}(I)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz 4.3.3 *Sei I Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $\xi \in \mathrm{int}(I)$. Sei f differenzierbar in ξ mit $f'(\xi) = 0$. Dann gilt:*

(i) *Existieren $\alpha,\beta \in I$ mit $\alpha < \xi < \beta$, so dass f differenzierbar in (α,β) ist und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (\alpha,\xi)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (\xi,\beta)$ gilt, so hat f ein lokales Maximum in ξ.*

(ii) *Existieren $\alpha,\beta \in I$ mit $\alpha < \xi < \beta$, so dass f differenzierbar in (α,β) ist und $f'(x) \leq 0$ für $x \in (\alpha,\xi)$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in (\xi,\beta)$ gilt, so hat f ein lokales Minimum in ξ.*

Existiert zusätzlich noch $f''(\xi)$, so gilt:

(iii) *Ist $f''(\xi) < 0$, so hat f ein lokales Maximum in ξ.*

(iv) *Ist $f''(\xi) > 0$, so hat f ein lokales Minimum in ξ.*

Beweis. (i) und (ii) folgen sofort aus Satz 4.3.2.

zu (iii): Wegen

$$0 > f''(\xi) = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{x-\xi}$$

existiert $\beta \in I$, $\beta > \xi$, mit $f'(x) < 0$ für $x \in (\xi,\beta)$. Analog existiert $\alpha \in I$ mit der geforderten Eigenschaft. Die Behauptung folgt jetzt aus (i).

Analog folgt (iv) aus (ii). $\square$

Beispiel. Sei $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{5-x}$. Dann ist f stetig und differenzierbar in $(0,5)$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\frac{1}{2\sqrt{5-x}}(-1) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}}\right).$$

Es gilt (für $0 < x < 5$)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq \sqrt{5-x} \Leftrightarrow 4x < 5 - x \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

und analog
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1,5) \quad \text{und} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$
Es folgt, dass f streng monoton steigend in $[0,1]$ ist (d. h., $f|[0,1]$ ist streng monoton steigend), dass f streng monoton fallend in $[1,5]$ ist und dass f in 1 ein lokales Maximum hat. Dieses ist sogar globales Maximum. Es gilt $f(1) = 5$. Das globale Minimum wird wegen $f(5) = \sqrt{5} < 2\sqrt{5} = f(0)$ in 5 angenommen, in 0 hat f ein lokales Minimum.

Der Graph von f ist in Abbildung 14 dargestellt.

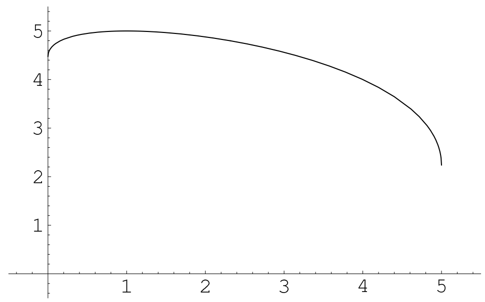

Abbildung 14: Der Graph von $f : [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{5-x}$.

Definition 4.3.1 Sei I Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für $x_1, x_2, x \in I$ mit $x_1 < x < x_2$
$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$
gilt. Gilt hier immer "$<$", so heißt f *streng konvex*. Gilt immer "$\geq$" bzw. "$>$", so heißt f *(streng) konkav*.

Die Bedingung in Definition 4.3.1 besagt, dass der Graph von f unterhalb der Sekanten liegt. Äquivalent ist, dass die Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x, f(x))$ kleinere Steigung hat als die durch $(x, f(x))$ und $(x_2, f(x_2))$, dass also
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$
gilt.

In Abbildung 15 ist dies für $f(x) = 1 + (x-4)^2 = x^2 + 8x + 17$, $x_1 = 1$, $x = 3$ und $x_2 = 6$ dargestellt.

Satz 4.3.4 *Sei I Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und in $\operatorname{int}(I)$ zweimal differenzierbar. Gilt $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$, so ist f konvex. Gilt $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in \operatorname{int}(I)$, so ist f konkav. Gilt immer "$>$" bzw. "$<$", so liegt strenge Konvexität bzw. Konkavität vor.*

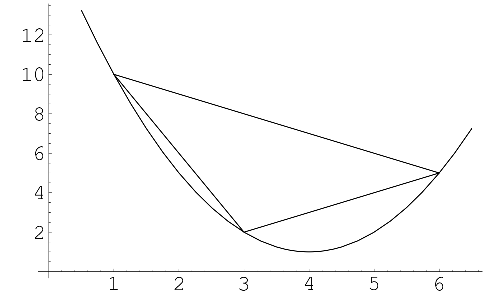

Abbildung 15: Konvexität.

Für den *Beweis* sei auf die Übung verwiesen.

Eine Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes führt auf das folgende Ergebnis.

Satz 4.3.5 (Regeln von de l'Hospital) *Sei (a,b) offenes Intervall und seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Gilt dann*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$
oder
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$
und existiert
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
so existiert auch
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$
und es gilt
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$
Entsprechendes gilt für den Grenzübergang $x \to b$.

Es sind $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen und die auftretenden Grenzwerte von f/g bzw. f'/g' können auch uneigentliche Grenzwerte sein.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt. Wir betrachten die stetigen Ergänzungen $F, G : [a,b) \to \mathbb{R}$, die durch
$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in (a,b) \\ 0 & \text{falls } x = a \end{cases},$$

und

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in (a,b)\ , \\ 0 & \text{falls } x = a \end{cases}$$

gegeben sind. Nach dem Satz von Rolle und wegen $G'(\xi) = g'(\xi) \neq 0$ für $\xi \in (a,b)$ gilt dann $g(x) = G(x) \neq G(a) = 0$ für $x \in (a,b)$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt für $x \in (a,b)$ dann

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem $\xi \in (a,x)$. Hieraus folgt die Behauptung, da mit $x \to a$ auch $\xi \to a$. $\square$

Wir haben Satz 4.3.5 für einseitige Grenzwerte formuliert, aber daraus folgt natürliche eine entsprechende Aussage für allgemeine Grenzwerte unmittelbar.

Beispiele. 1. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\tan x} = 1,$$

denn wegen $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2} \to 1$ und $\tan'(x) = 1/\cos^2 x \to 1$ folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin' x}{\tan' x} = 1.$$

2. Wir untersuchen die Existenz des Grenzwertes

$$L := \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\arctan x}.$$

Zunächst gilt,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \ln(1+x)}{\ln(1+x)\arctan x},$$

falls L existiert. Nach Satz 4.3.5 folgt

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}\arctan x + \ln(1+x)\frac{1}{1+x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x^2}{(1+x^2)\arctan x + (1+x)\ln(1+x)}, \end{aligned}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Auch dort konvergieren für $x \to 0$ wieder Zähler und Nenner gegen 0. Satz 4.3.5 liefert

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{1-2x}{2x\arctan x + 1 + \ln(1+x) + 1} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-2x}{2x\arctan x + 2 + \ln(1+x)} \end{aligned}$$

falls der letzte Grenzwert existiert. Dies ist aber offensichtlich der Fall und der Grenzwert ist $\frac{1}{2}$. Wir erhalten $L = \frac{1}{2}$.

Wir diskutieren einige numerische Verfahren zur Auflösung von Gleichungen. Wir wollen eine Nullstelle ξ einer differenzierbaren Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ bestimmen,

wobei I ein Intervall ist. Wir beginnen mit einem Näherungswert x_1 und berechnen den Schnittpunkt x_2 der Tangente an f im Punkte $(x_1, f(x_1))$ mit der x-Achse. (Dieser Schnittpunkt existiert falls $f'(x_1) \neq 0$.) Dies führt auf die Gleichung $f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) = 0$, also

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

In vielen Fällen ist x_2 ein besserer Näherungswert für ξ als x_1. Man definiert nun rekursiv eine Folge (x_n) durch

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Wir werden sehen, dass unter geeigneten Voraussetzungen and f und x_1 tatsächlich $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ gilt.

Das hier beschriebene Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle heißt *Newton-Verfahren.* Man nennt x_1 den *Startwert.* Man sagt, dass das Verfahren (gegen ξ) *konvergiert*, falls die Folge (x_n) definiert werden kann, also $x_n \in I$ und $f'(x_n) \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt, und falls $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Im Beispiel nach dem Zwischenwertsatz 3.2.1 hatten wir gesehen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x$, eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$ hat. Als Rekursionsformel erhalten wir

$$x_{n+1} := x_n - \frac{\exp(x_n) + x_n}{\exp(x_n) + 1}.$$

Wir wählen als Startwert $x_1 := 0$ und erhalten $x_2 = -\frac{1}{2}$,

$$x_3 = -\frac{3\sqrt{e}}{2(\sqrt{e}+1)} = -0{,}56631\ldots$$

$x_4 = -0{,}5671431650\ldots$, $x_5 = -0{,}5671432902\ldots$, usw. Der Graph von f sowie der Tangenten an die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ ist in Abbildung 16 dargestellt. Man kann (mit Hilfe der folgenden Sätze) zeigen, dass tatsächlich $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi = -0{,}56714\ldots$ gilt.

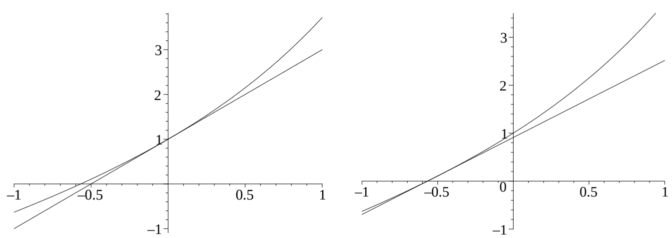

Abbildung 16: Das Newton-Verfahren für $f(x) = e^x + x$.

Zunächst beweisen wir folgenden Satz.

Satz 4.3.6 *Sei I Intervall, $\xi \in \operatorname{int}(I)$ und $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in ξ mit $|g'(\xi)| < 1$. Dann existiert $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft:*

Es ist $J := (\xi-\delta, \xi+\delta) \subset I$ und ist $x_1 \in J$ und die Folge (x_n) rekursiv definiert durch $x_{n+1} := g(x_n)$, so gilt $x_n \in J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ mit $\alpha := |g'(x)| + \varepsilon < 1$. Nach Definition der Differenzierbarkeit existiert $\delta > 0$ mit $J := (\xi - \delta, \xi + \delta) \subset I$ und

$$\left|\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi} - g'(\xi)\right| < \varepsilon$$

für $|x - \xi| < \delta$, d.h., für $x \in J$. Es folgt

$$\left|\frac{g(x) - \xi}{x - \xi}\right| = \left|\frac{g(x) - g(\xi)}{x - \xi}\right| < |g'(\xi)| + \varepsilon = \alpha$$

und damit $|g(x) - \xi| < \alpha|x - \xi|$ für $x \in J$. Induktion liefert für $x_1 \in J$, dass $x_n \in J$ und $|x_n - \xi| \le \alpha^{n-1}|x_1 - \xi|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert wegen $\alpha < 1$, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. $\square$

Beispiel. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$. Wegen $\cos\left(\frac{1}{2}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ und $\cos 1 < 1$ folgt mit Hilfe des Zwischenwertsatzes leicht, dass $\xi \in (0, 1)$ mit $g(\xi) = \xi$ existiert. Für $\varepsilon := \frac{1}{2}$ gilt $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset (\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon) \subset \left(0, \frac{3}{2}\right)$ und damit $|g'(x)| = \sin x \le \sin\left(\frac{3}{2}\right) < 1$ für $|x - \xi| < \varepsilon$. Mit Satz 4.3.6 und der dem Satz folgenden Bemerkung folgt, dass die rekursiv durch $x_{n+1} := g(x_n)$ definierte Folge (x_n) für jeden Startwert $x_1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ konvergiert. Zum Beispiel für $x_1 = 1$ erhält man $x_2 = 0.5403023059\ldots$, $x_3 = 0.8575532158\ldots$, $x_{19} = 0.7393038924\ldots$, $x_{20} = 0.7389377567\ldots$, usw. Es gilt $\xi = 0.7390851332\ldots$.

Satz 4.3.7 *Sei I Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Sei $\xi \in \operatorname{int}(I)$ mit $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi) \ne 0$. Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $J := (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon) \subset I$, so dass das Newton-Verfahren für alle Startwerte aus J gegen ξ konvergiert.*

Beweis. Wir wenden Satz 4.3.6 auf

$$g(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

an. Die Funktion g kann in einem Intervall definiert werden, welches ξ im Innern enthält. Es gilt $g(\xi) = \xi$. Wegen

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

folgt $g'(\xi) = 0$, und damit die Behauptung aus Satz 4.3.6. $\square$

Bemerkungen. 1. Die Behauptung von Satz 4.3.7 gilt auch dann, wenn f nur einmal stetig differenzierbar ist. Der Beweis sei als Übung überlassen.

2. Wendet man das Newton-Verfahren auf $f(x) = x^2 - c$ an, so erhält man das in §2.3 besprochene Heron-Verfahren zur Berechnung von $\sqrt{c}$.

4.4 Folgen und Reihen differenzierbarer Funktionen

Satz 3.7.2 besagt, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist. Wir beweisen ein analoges Resultat für Differenzierbarkeit.

Satz 4.4.1 *Sei I beschränktes Intervall und (f_n) eine Folge von differenzierbaren Funktionen von I nach $\mathbb{C}$. Die Folge (f_n') konvergiere gleichmäßig. Existiert dann $\alpha \in I$, so dass $(f_n(\alpha))$ konvergiert, so konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ und es gilt $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für alle $x \in I$.*

Der Satz besagt also, dass man unter den gemachten Voraussetzungen den Grenzübergang $n \to \infty$ mit der Differentiation (die ja auch eine Grenzwertbildung ist) vertauschen kann, dass also $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ gilt.

Man beachte, dass die letzte Gleichung nicht gelten muss, wenn $f_n \to f$ gleichmäßig und f und alle f_n differenzierbar sind. Dies zeigt das Beispiel $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Hier gilt $f_n \to 0$ gleichmäßig, aber $f_n'(0) = \cos(n0) = 1 \not\to 0$.

Beweis von Satz 4.4.1. Sei $a := \inf I$ und $b := \sup I$. Wir zeigen zunächst mit dem Cauchykriterium, dass (f_n) gleichmäßig konvergiert. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Nach Cauchykriterium für (f_n') existiert $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m'(x) - f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

für $m, n \ge N_1$ und $x \in I$. Nach Cauchykriterium für $(f_n(\alpha)$ existiert $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $m, n \ge N_2$. Nach Satz 4.2.5 gilt dann für $m, n \ge N := \max\{N_1, N_2\}$ und $x \in I$ mit einem $\xi \in I$:

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &\le |(f_m(x) - f_n(x)) - (f_m(\alpha) - f_n(\alpha))| + |f_m(\alpha) - f_n(\alpha)| \\
&\le |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)| \cdot |x - \alpha| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist (f_n) gleichmäßig konvergent. Sei $f : I \to \mathbb{C}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Wir zeigen jetzt, dass f differenzierbar ist und $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ gilt. Sei dazu $x \in I$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $F_n : I \to \mathbb{C}$ durch

$$F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} & \text{falls } y \ne x, \\ f_n'(x) & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Dann ist F_n stetig nach Satz 3.3.2. Nach Satz 4.2.5 existiert zu $y \in I$ wieder $\xi \in I$ mit

$$|F_m(y) - F_n(y)| \le |f_m'(\xi) - f_n'(\xi)|\,.$$

Hierbei wählt man $\xi = x$ falls $y = x$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n') folgt nun die gleichmäßige Konvergenz von (F_n). Damit ist nach Satz 3.7.2 die durch $y \mapsto \lim_{n\to\infty} F_n(y)$ definierte Funktion $F : I \to \mathbb{C}$ stetig. Offensichtlich gilt

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{falls } y \neq x, \\ \lim_{n\to\infty} f_n'(x) & \text{falls } y = x. \end{cases}$$

Aus Satz 3.3.2. folgt jetzt die Differenzierbarkeit von f in x ist und $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. □

Ist in obigem Satz I unbeschränkt, so gelten noch alle gemachten Behauptungen, außer dass (f_n) nicht mehr gleichmäßig konvergieren muss. Dies sieht man durch Einschränkung auf beschränkte Teilintervalle ein.

Wie bei Satz 3.7.2 gilt wieder ein Analogon für Reihen.

Satz 4.4.2 *Sei $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ Potenzreihe mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für den Konvergenzradius r gelte $0 < r \leq \infty$. Sei $I := (x_0 - r, x_0 + r)$ falls $r < \infty$ und $I = \mathbb{R}$ falls $r = \infty$. Dann ist die durch $x \mapsto \sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (x-x_0)^{n-1}$ für $x \in I$.*

Beweis. Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ hat die Potenzreihe $\sum_{n=1}^\infty n a_n(x-x_0)^{n-1}$ ebenfalls Konvergenzradius r. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $g_n : I \to \mathbb{C}$, $g_n(x) = a_n(x-x_0)^n$. Dann gilt $g_n'(x) = n a_n (x-x_0)^{n-1}$. Sei $0 < \rho < r$ und $J := (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Nach Satz 3.7.5 konvergiert dann $\sum_{n=0}^\infty g_n'$ gleichmäßig in J. Außerdem konvergiert $\sum_{n=0}^\infty g_n(x_0)$ (zur Summe a_0.) Mit Satz 4.4.1 (in der Version für Reihen) folgt, dass f differenzierbar in J ist mit $f'(x) = \sum_{n=0}^\infty g_n'(x) = \sum_{n=1}^\infty n a_n (x-x_0)^{n-1}$ für $x \in J$. Die Behauptung folgt für $\rho \to r$; vgl. Satz 3.7.5. □

Beispiel. Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Der Konvergenzradius ist 1 (wegen $\sqrt[k]{k} \to 1$). Aus dem Leibnizkriterium erhält man, dass die Reihe sogar für $x \in [-1,1]$ gleichmäßig konvergiert. Durch

$$x \mapsto \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

wird also eine stetige Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert. Diese ist nach Satz 4.4.2 differenzierbar in $(-1,1)$ mit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^\infty (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x.$$

Mit Satz 4.3.1 und wegen $f(0) = 0 = \arctan 0$ folgt $f(x) = \arctan x$ für $x \in [-1,1]$. Man beachte, dass die Reihe für f' nur in $(-1,1)$ konvergiert, und auch dort nicht gleichmäßig.

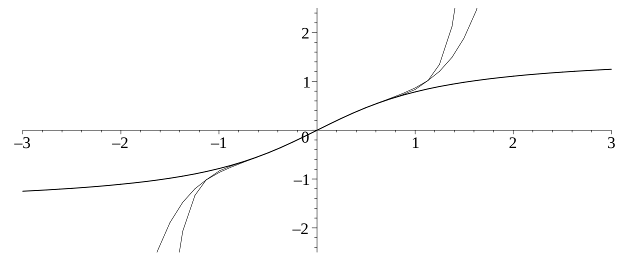

Abbildung 17: Teilsummen (vom Grad 5 und 10) der Reihe des Arcus Tangens.

Wegen $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ folgt insbesondere

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$$

Diese Reihe wird auch nach Leibniz benannt.

Aus Satz 4.4.2 folgt, dass mit f, I wie dort die Funktion f unendlich oft differenzierbar ist und dass

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^\infty n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1) a_n (x-x_0)^{n-k}$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ gilt. Insbesondere gilt $f^{(k)}(x_0) = k! a_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Umgekehrt kann man nun für beliebig oft in x_0 differenzierbares f die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$ mit $a_k = f^{(k)}(x_0)/k!$ bilden und sich fragen, ob sie zur Summe $f(x)$ konvergiert. Man nennt diese Reihe, also die Reihe

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

die *Taylorreihe* von f in x_0 und für $n \in \mathbb{N}$ ihre n-te Teilsumme

$$T_n(x) := T_n(x, f, x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

das n-te *Taylorpolynom* (von f in x_0). Weiter heißt

$$R_n(x) := R_n(x, f, x_0) := f(x) - T_n(x)$$

das n-te Restglied der Taylorentwicklung (von f in x_0).

Man beachte, dass aus der Konvergenz der Taylorreihe von f noch *nicht* folgen muss, dass ihre Summe $f(x)$ ist. Man betrachte etwa das *Beispiel* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

mit $x_0 = 0$. Man kann zeigen, dass f beliebig oft differenzierbar ist und $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Damit konvergiert die Taylorreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ zur Summe 0.

Satz 4.4.3 *Sei I Intervall, $x_0, x \in I$, $x_0 \neq x$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei n-mal stetig differenzierbar in I und $(n+1)$-mal differenzierbar in $\operatorname{int}(I)$. Dann existiert ξ zwischen x_0 und x mit*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Der Spezialfall $n = 0$ ist der Mittelwertsatz. Die Beweisidee hier ist ähnlich.

Beweis von Satz 4.4.3. Zunächst existiert $\rho \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{\rho}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Zu zeigen ist, dass ρ von der Form $\rho = f^{(n+1)}(\xi)$ ist. Sei dazu $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x - t)^k - \frac{\rho}{(n+1)!}(x - t)^{n+1}.$$

Dann ist F stetig in I und differenzierbar in $\operatorname{int}(I)$ und eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(t) - \rho\right).$$

Weiter gilt $F(x_0) = F(x) = 0$ und nach dem Satz von Rolle existiert ξ zwischen x_0 und x mit $F'(\xi) = 0$. □

Beispiel 1. Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$. Dann ist f beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$ und $f'''(x) = 2/x^3$. Durch vollständige Induktion zeigt man leicht, dass

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\frac{(k-1)!}{x^k}.$$

Für $x \in (1, 2]$ existiert dann $\xi \in (1, x)$ mit

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-1}{\xi}\right)^{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Es folgt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ und damit

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

für $x \in (1, 2]$.

Insbesondere gilt

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

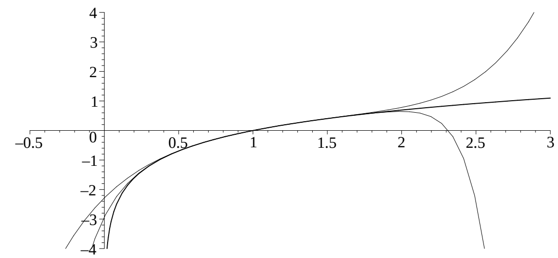

Abbildung 18: Der Logarithmus und die Taylorpolynome vom Grad 5 und 10.

Für $x \in [\frac{1}{2}, 1)$ gilt $\frac{1}{2} \leq x < \xi < 1$ und obiges Argument liefert wieder $R_n(x) \to 0$. Tatsächlich gilt dies (und damit obige Potenzreihenentwicklung des Logarithmus) für $x \in (0, 2]$, aber für $x \in (0, \frac{1}{2})$ können wir dies mit obiger Darstellung des Restglieds $R_n(x)$ nicht zeigen.

Um zu zeigen, dass

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$

für alle $x \in (0, 2]$ gilt, kann man ähnlich wie bei der Reihe des Arcus Tangens vorgehen. Durch die Reihe auf der rechten Seite wird eine differenzierbare Funktion $g : (0, 2) \to \mathbb{R}$ mit

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k = \frac{1}{1 - (1-x)} = \frac{1}{x}$$

definiert, und damit folgt $g'(x) = \ln' x$ und wegen $g(1) = 0 = \ln 1$ auch $g(x) = \ln x$ für $x \in (0, 2)$.

Beispiel 2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$. Wir betrachten wieder die Taylorentwicklung um $x_0 = 1$. Durch vollständige Induktion sieht man leicht, dass

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$$

gilt. Mit

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}$$

folgt

$$\frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k}.$$

(Man überzeugt sich leicht, dass obige Definition von $\binom{\alpha}{k}$ für $\alpha \in \mathbb{N}$ mit der Definition der Binomialkoeffizienten aus §1.5 übereinstimmt.) Wir erhalten die Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (x-1)^k.$$

Wegen

$$\left|\lim_{k\to\infty} \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}}\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{\alpha - k}\right| = 1$$

und Satz 2.9.2 ist der Konvergenzradius dieser Reihe 1.

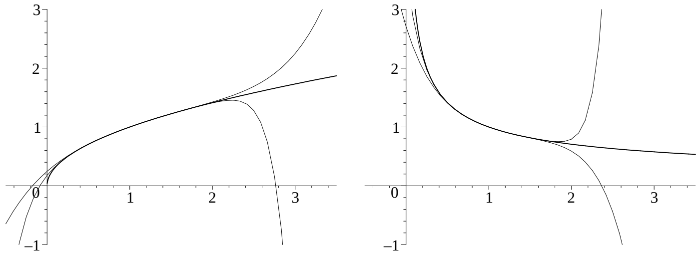

Abbildung 19: Taylorpolynome vom Grad 5 und 10 für $\sqrt{x}$ und $1/\sqrt{x}$.

Um zu zeigen, dass die Taylorreihe für $x \in (1,2)$ gegen $f(x) = x^\alpha$ konvergiert, betrachten wir das Restglied R_n. Es existiert wieder $\xi \in (1,x)$ mit

$$|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}\right| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\xi^{\alpha-n-1}\,(x-1)^{n+1}\right|.$$

Da $\xi > 1$ folgt

$$|R_n(x)| \le \left|\binom{\alpha}{k}\,(x-1)^k\right|$$

falls $n \ge \alpha - 1$. Da die Taylorreihe den Konvergenzradius 1 hat, folgt $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$. Das gleiche Argument funktioniert auch wieder für $x \in (\frac{1}{2}, 2)$. Tatsächlich gilt

$$x^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}(x-1)^k$$

aber sogar für alle $x \in (0,2)$.