Prof. Dr. W. Bergweiler WS 2011/12

Analysis I — Serie 12

1. Auf welcher Teilmenge D von $\mathbb{R}$ kann durch

$$x \mapsto 2 \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ definiert werden?
Wo ist f differenzierbar? Vergleichen Sie die Ableitung von f mit der des Arcus Sinus und des Arcus Cosinus. Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen Funktionen, vgl. Satz 4.3.1 der Vorlesung.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist im Wesentlichen eine Schulbuchaufgabe. (Die Originalaufgabe des Schulbuches enthält auch die Berechnung eines Flächeninhalts, aber dieses Thema werden wir erst im zweiten Semester behandeln.)

2. Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen die durch die folgenden Ausdrücke gegebenen Funktionen f definiert sind, stetig sind und differenzierbar sind. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktionen:

(a) $f(x) = \ln x + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \arcsin(e^x - 1) + 4\sqrt{2 - e^x}$

3. In eine halbkugelförmige Schale mit dem Radius 1 wird ein Stab der Länge 2 gelegt. Bei welcher Lage des Stabes liegt sein Mittelpunkt am tiefsten?

Bemerkung: Diese Aufgabe ist einem Schulbuch entnommen.

4. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $g_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = xe^{-nx}$ und $g_n(x) = nxe^{-nx}$.
Zeigen Sie, dass (f_n) gleichmäßig gegen 0 und dass (g_n) punktweise aber nicht gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Die Lösungen (für Zwei-Fächer-BSc nur die der ersten drei Aufgaben) sind bis zum Dienstag, dem 31.01.2012, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.