Analysis I — Serie 11

1. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}\sin(2x) &= 2\sin x\cos x,\\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \;=\; 2\cos^2 x - 1,\\ \sin(3x) &= -4\sin^3 x + 3\sin x,\\ \cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

   Folgern Sie hieraus, dass

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4} &= \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\ \cos\frac{\pi}{6} &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3},\\ \cos\frac{\pi}{3} &= \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Die Zahlenfolgen (s_k) und (t_k) seien definiert durch

$$s_k = 2^{k+1}\cdot 3\sin\left(\frac{\pi}{2^k 3}\right) \quad \text{und} \quad t_k = 2^{k+1}\cdot 3\tan\left(\frac{\pi}{2^k 3}\right).$$

   Zeigen Sie, dass diese Folgen mit den Folgen (a_k) und (b_k) aus Aufgabe 2 der Serie 6 übereinstimmen, d.h., es gilt $a_k = s_k$ und $b_k = t_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folgern Sie hieraus, dass

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 2\pi.$$

   Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1, dass

$$\sin x = \sqrt{\frac{\sin(2x)\tan x}{2}} \quad \text{und} \quad \tan x = \frac{\sin(2x)\tan(2x)}{\sin(2x)+\tan(2x)}$$

   für $0 < x < \pi/4$. Folgern Sie hieraus, dass die s_k und t_k den gleichen Rekursionsformeln genügen wie die a_k und b_k. Benutzen Sie Aufgabe 3 der Serie 10 für die Berechnung des Grenzwerts.

3. Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = -2 + i2\sqrt{3}$.

4. Seien $p, q \in \mathbb{R}$ und sei

$$d := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

   Weiter sei $u \in \mathbb{C}$ mit

$$u^3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{-d}$$

   und $z := u + \overline{u} = 2\operatorname{Re} u$. Zeigen Sie, dass $z^3 + pz + q = 0$.

   Berechnen Sie damit die Lösungen der Gleichung $z^3 - 12z - 12 = 0$. Zeigen Sie insbesondere, dass eine der Lösungen durch $z = 4\cos(\frac{1}{3}\arccos(\frac{3}{4}))$ gegeben ist.

Die Lösungen (für Zwei-Fächer-BSc nur die der ersten drei Aufgaben) sind bis zum Dienstag, dem 24.01.2012, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.