Analysis I — Serie 9

1. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n\sqrt[n]{3}}\right)^{n^2} z^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^{2n}}{(2n)!} z^n.$$

2. Für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{\alpha+1-j}{j}$$

und

$$\binom{\alpha}{0} := 1.$$

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k.$$

Bemerkung: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ erhält man die bereits früher definierten Binomialkoeffizienten.

3. Zeigen Sie, dass $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$ und $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Sei r der Konvergenzradius der zugehörigen Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Zeigen Sie, dass

$$r \geq \liminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Bemerkung. Es gilt auch

$$r \leq \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Die Lösungen (für Zwei-Fächer-BSc nur die der ersten drei Aufgaben) sind bis zum Dienstag, dem 10.01.2012, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!