Analysis I — Serie 8

1. Untersuchen Sie Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 3^n}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

   auf Konvergenz.

2. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \frac{\beta}{n!}}{(n+1)^{\alpha} \sqrt[n]{n}} \quad ?$$

3. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge

$$\left(\left(n + \frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}} .$$

4. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$x^+ := \max\{x, 0\} \quad \text{und} \quad x^- := \max\{-x, 0\}.$$

   Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

   (a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann absolut konvergent, wenn die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergieren.

   (b) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bedingt konvergent, so gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

Die Lösungen (für Zwei-Fächer-BSc nur die der ersten drei Aufgaben) sind bis zum Dienstag, dem 21.12.2011, 10.00 Uhr, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.