Analysis I — Serie 6

1. Beweisen Sie Satz 2.3.2 der Vorlesung.

2. Für $k \in \mathbb{N}$ sei a_k der Umfang des regelmäßigen 2^k3-Ecks, dessen Umkreis den Radius 1 hat, und es sei b_k der Umfang des regelmäßigen 2^k3-Ecks, dessen Inkreis den Radius 1 hat. Archimedes hat die Rekursionsformeln
$$b_{k+1} = \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k}$$
und
$$a_{k+1} = \sqrt{a_k b_{k+1}}$$
gefunden. Berechnen Sie $a_1, \ldots, a_5, b_1, \ldots, b_5$ mit einem Taschenrechner (oder einem anderen Computer). Zeigen Sie, dass die Folgen (a_k) und (b_k) konvergent sind und einen gemeinsamen Grenzwert haben. (Archimedes hat a_5 und b_5 berechnet bzw. durch Abschätzung der auftretenden Wurzelterme obere und untere Schranken für den gesuchten Grenzwert gegeben.)

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

3. Konvergiert die durch
$$a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$
gegebene Folge (a_n)?

4. Bestimmen Sie die Häufungswerte der durch $a_n = \sqrt{n} - [\sqrt{n}]$ gegebenen Folge (a_n).

Die Lösungen (für Zwei-Fächer-BSc nur die der ersten drei Aufgaben) sind bis zum Montag, dem 5.12.2011, Vorlesungbeginn, ins Fach des jeweiligen Übungsleiters im 1. Stock des Mathematischen Seminars zu legen.